DAY — **09** SEAT NUMBER | | | | | | | |

2026	II	21	1100	**J-166**	(M)

MATHEMATICS & STATISTICS (40)
(ARTS & SCIENCE)

Time : 3 Hrs. **(8 Pages)** **Max. Marks : 80**

सूचना :

*प्रश्नपत्रिका एकूण **चार** विभागांत विभागलेली आहे.*

*(१) **विभाग अ** – प्रश्न क्रमांक १ मध्ये ८ **बहुपर्यायी प्रश्न प्रत्येकी २ गुणांचे** आहेत.*

*प्रश्न क्रमांक २ मध्ये **एकूण ४ अतिलघुत्तरी प्रश्न प्रत्येकी १ गुणाचे** आहेत.*

*(२) **विभाग ब** – प्रश्न क्रमांक ३ ते १४ असे १२ **लघुत्तरी प्रश्न प्रत्येकी २ गुण** आहेत. (कोणतेही ८ प्रश्न सोडवा.)*

*(३) **विभाग क** – प्रश्न क्रमांक १५ ते २६ असे १२ **लघुत्तरी प्रश्न प्रत्येकी ३ गुणांचे** आहेत. (कोणतेही ८ प्रश्न सोडवा.)*

*(४) **विभाग ड** – प्रश्न क्रमांक २७ ते ३४ असे ८ **दीर्घोत्तरी प्रश्न प्रत्येकी ४ गुणांचे** आहेत. (कोणतेही ५ प्रश्न सोडवा.)*

(५) लॉग टेबलच्या वापरास अनुमती आहे. गणनयंत्राचा वापर करण्यास अनुमती नाही.

(६) उजव्या बाजूस दिलेल्या संख्या प्रश्नांचे पूर्ण गुण दर्शवितात.

(७) आलेख कागदाचा वापर अनिवार्य नाही. फक्त कच्चा आलेख काढणे अपेक्षित आहे.

(८) बहुपर्यायी प्रश्नांचे मूल्यमापन हे पहिल्या प्रयत्नात सोडविलेल्या प्रश्नांसाठीच करण्यात येईल.

(९) प्रत्येक विभागाची सुरुवात नवीन पानावर करावी.

विभाग - अ

प्र. १. **प्रत्येक उपप्रश्नासाठी खाली दिलेल्या पर्यायी उत्तरातून योग्य तो पर्याय निवडून खालील प्रश्नांची उत्तरे लिहा :** **[१६]**

(i) $\sim p \rightarrow q$ या विधानाच्या विरोधाभासाचा (contrapositive) व्यत्यास (converse) .... आहे.

(a) $q \rightarrow p$

(b) $\sim q \rightarrow p$

(c) $p \rightarrow \sim q$

(d) $\sim q \rightarrow \sim p$ (२)

(ii) जर $A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, तर A या सारणीची संलग्नीत सारणी (adjoint of matrix) .... आहे.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ (२)

(iii) जर $\tan^{-1}(2x) + \tan^{-1}(3x) = \frac{\pi}{4}$, तर $x =$ ______

(a) -1

(b) $\frac{1}{6}$

(c) $\frac{1}{3}$

(d) $\frac{3}{2}$ (२)

(iv) रेषा $\bar{r}=(\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k})+\lambda(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})$ आणि प्रतल $\bar{r}\cdot(2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k})=8$ यामधील कोन ——— आहे.

(a) $\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)$ (b) $\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

(c) $\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ (d) $\sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ (२)

(v) जर $y=\sec(\tan^{-1}x)$ तर $x=1$ या किंमतीसाठी $\frac{dy}{dx}=$ ——— आहे.

(a) $\frac{1}{2}$ (b) 1

(c) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (d) $\sqrt{2}$ (२)

(vi) $x=1.99$ या किंमतीसाठी $f(x)=x^3-3x+5$ या फलाचे अंदाजे मूल्य ——— आहे.

(a) 6.09 (b) 6.91

(c) 7.09 (d) 7.91 (२)

(vii) $\int_1^2 \frac{1}{x^2}\cdot e^{\frac{1}{x}}dx=$ ———

(a) $\sqrt{e}+1$ (b) $\sqrt{e}-1$

(c) $\sqrt{e}(\sqrt{e}-1)$ (d) $\frac{\sqrt{e}-1}{e}$ (२)

(viii) जर $f(x)=\frac{x+2}{18}$, जेव्हा $-2<x<4$

$=0$, अन्यथा

हे X या संतत यादृच्छिक चलाचे (c.r.v.) संभाव्यता घनताफल (p.d.f.) आहे, तर $P(|X|<1)=$ ———.

(a) $\frac{1}{9}$ (b) $\frac{2}{9}$

(c) $\frac{1}{27}$ (d) $\frac{2}{27}$ (२)

प्र. २. **खालील प्रश्नांची उत्तरे लिहा :** [४]

(i) $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$ ची द्वैती (dual) लिहा. (१)

(ii) सोडवा : $\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)+2\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ (१)

(iii) सोडवा : $\int \frac{2x}{1+x^2} dx$ (१)

(iv) $(y''')^2+3(y'')^3+3xy'+5y=0$

या विकलनीय समीकरणाची (differential equation) कोटी (degree) लिहा. (१)

विभाग - ब

खालील दिलेल्या प्रश्नांमधून कोणतेही आठ प्रश्न सोडवा : [१६]

प्र. ३. $(\sim p \wedge q) \vee (p \wedge \sim r)$ या विधानाचे विद्युत परिपथ (switching circuit) तयार करा. (२)

प्र. ४. ΔABC मध्ये, सिद्ध करा

$a(b\cos C - c\cos B) = b^2 - c^2$ (२)

प्र. ५. $4\cos^2\theta = 3$ या समीकरणाची व्यापक उकल (general solution) काढा. (२)

प्र. ६. जर $x^2+kxy-3y^2=0$ या समीकरणाने प्रदर्शित केलेल्या रेषांच्या चढांची बेरीज त्यांच्या गुणाकाराच्या दुप्पट आहे, तर k ची किंमत काढा. (२)

प्र. ७. सदिश (vector) $\bar{a}=3\hat{i}+2\hat{j}+9\hat{k}$ आणि $\bar{b}=\hat{i}+p\hat{j}+3\hat{k}$ हे एकमेकांना लंब आहेत तर p ची किंमत काढा. (२)

प्र. ८. $A(1,2,3)$ आणि $B(2,3,4)$ या बिंदूमधून जाणाऱ्या रेषेचे सदिश समीकरण (vector equation) काढा. (२)

SEAT NUMBER | | | | | | | |

प्र. ९. जर $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$, तर $\frac{dy}{dx}$ ची किंमत काढा. (२)

प्र. १०. जर $y=x^3+7x^2-2x-9$, तर $\frac{d^2y}{dx^2}$ ची किंमत काढा. (२)

प्र. ११. तपासा की, फल $f(x)=x^3+6x^2+12x-7$ सर्व वास्तवसंख्यांसाठी ($x \in R$) वृद्धीफल (increasing function) आहे की घटणारे फल (decreasing function) आहे. (२)

प्र. १२. एक दगड स्थिर तळ्यामध्ये टाकल्यानंतर वर्तुळाकार लाटा तयार होतात. लाटेची त्रिज्या वाढण्याचा दर 3 cm/sec आहे. जर त्रिज्या 8 cm असेल तर लाटांनी बंदिस्त क्षेत्रफळाच्या वाढीचा दर काढा. (२)

प्र. १३. सोडवा $\int \sqrt{1+\sin 2x} \cdot dx$ (२)

प्र. १४. जेव्हा $X \sim B(n,p)$, जर $n=10, E(X)=8$ तर Var(X) काढा. (२)

विभाग - क

खालीलपैकी कोणतेही <u>आठ</u> प्रश्न सोडवा : **[२४]**

प्र. १५. $(p \wedge q) \wedge (\sim p \vee \sim q)$ हे विधान (statement pattern) सर्वत: सत्य (tautology) किंवा परस्परविरोध (contradiction) किंवा कॉन्टींजेंसी (contingency) आहे का ते तपासा. (३)

प्र. १६. जर ΔABC मध्ये $A=45^\circ$ आणि $B=60^\circ$ तर त्रिकोणाच्या बाजूंचे गुणोत्तर (ratio) काढा. (३)

प्र. १७. जर त्रिकोणाचे $A(3,1,4)$ आणि $B(-4,5,-3)$ हे दोन शिरोबिंदू आहेत, आणि $G(-1,2,1)$ हा मध्यसंपात (centroid) आहे. तर त्रिकोणाच्या तिसऱ्या शिरोबिंदू C चे निर्देशक काढा. (३)

प्र. १८. ΔABC च्या बाजू BC, CA, ABचे अनुक्रमे D, E, F मध्यबिंदू आहेत. तर सिद्ध करा की $\overline{AD}+\overline{BE}+\overline{CF}=\overline{0}$. (३)

प्र. १९. दाखवा की रेषा $\bar{r}=(\hat{i}+\hat{j}-\hat{k})+\lambda(2\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k})$ आणि $\bar{r}=(4\hat{i}-3\hat{j}+2\hat{k})+\mu(\hat{i}-2\hat{j}+2\hat{k})$ हे एकमेकांना छेदतात. (३)

प्र. २०. $\bar{r}=(\hat{i}-\hat{j})+\lambda(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})+\mu(\hat{i}-2\hat{j}+3\hat{k})$ या प्रतलाचे कार्तेशियन समीकरण (cartesian equation) काढा. (३)

प्र. २१. जर $y=f(u)$ हे u चे विकलनीय फल (differentiable function) आहे आणि $u=g(x)$ हे x चे विकलनीय फल (differentiable function) आहे तर सिद्ध करा की y हे x चे विकलनीय फल आहे आणि $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\times\dfrac{du}{dx}$ (३)

प्र. २२. $f(x)=\log x$, या फलाच्या [1, e] या अंतराळात (interval) LMVT ची पडताळणी करा. (३)

प्र. २३. सोडवा $\int \dfrac{\sin x}{\sin 3x}dx$ (३)

प्र. २४. $3e^x \tan y\,dx+(1+e^x)\sec^2 y\ dy=0$ हे विकलनीय समीकरण (differential equation) सोडवा. (३)

प्र. २५. निष्पक्ष फासा (fair die) फेकला (thrown) असता, X ही संख्या सर्वात वरच्या पृष्ठभागावर मिळणारी संख्या आहे, तर $E(X)$ आणि विचरण (Variance) $V(X)$ ची अपेक्षित किंमत काढा. (३)

प्र. २६. दोन फाशांची जोडी 4 वेळा फेकल्यास, जर दोन्ही फाशांवरील अंक दुहेरी (doublet) असल्यास यशस्वी होण्याची संभाव्यता मिळते. तर दोन वेळा यशस्वी होण्याची संभाव्यता काढा. (३)

SEAT NUMBER | | | | | | |

विभाग - ड

खालीलपैकी कोणतेही पाच प्रश्न सोडवा : **[२०]**

प्र. २७. जर $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ तर सिद्ध करा $A \cdot (\text{adj } A) = (\text{adj } A) \cdot A = |A| \cdot I$ (४)

प्र. २८. दाखवा की x आणि y चलातील कोटी दोन असणारे एकजिनसी समीकरण, अर्थात $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$, हे समीकरण जर $h^2 - ab \geq 0$ असेल तर आरंभबिंदूतून जाणाऱ्या रेषांची जोडी दर्शविते. (४)

प्र. २९. जर अवकाशामध्ये (space) $A(\bar{a})$ आणि $B(\bar{b})$ हे दोन बिंदू आहेत व रेषाखंड AB वरील $R(\bar{r})$ बिंदू त्या रेषाखंडास $m : n$ या गुणोत्तरात (ratio) अंतर्गत (internally) विभागत (dividing) असेल तर सिद्ध करा

$$\bar{r} = \frac{m\bar{b} + n\bar{a}}{m+n}$$ (४)

प्र. ३०. खालील रेषीय प्रयोजनात्मक प्रश्न (L.P.P.) आलेख पद्धतीने सोडवा.

किमान (minimize) : $z = 5x + 2y$,

अटी (subjective) : $5x + y \geq 10$

$x + y \geq 6$

$x \geq 0$

$y \geq 0$ (४)

प्र. ३१. सोडवा : $\int \frac{3x^2 + 4x - 5}{(x^2 - 1)(x + 2)} \cdot dx$ (४)

प्र. ३२. सिद्ध करा :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-x) \cdot dx$$

यावरून $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 x \cdot dx$ सोडवा. (४)

प्र. ३३. वर्तुळ $x^2 + y^2 = 1$ आणि रेषा $x + y = 1$ यामधील पहिल्या चरणातील बंदिस्त भागाचे (enclosed region) क्षेत्रफळ काढा. (४)

प्र. ३४. खालील विकलनीय समीकरण सोडवा

$$x^2 \cdot \frac{dy}{dx} = x^2 + xy + y^2$$ (४)

◆◆◆