DAY — **08** SEAT NUMBER

2025	VII	03	1100	J-385	(M)

MATHEMATICS & STATISTICS (40)
(ARTS & SCIENCE)

Time : 3 Hrs. **(8 Pages)** **Max. Marks : 80**

सूचना :

*प्रश्नपत्रिका एकूण **चार** विभागांत विभागलेली आहे.*

*(१) **विभाग अ –** प्रश्न क्रमांक १ मध्ये ८ **बहुपर्यायी प्रश्न प्रत्येकी २ गुणांचे** आहेत.*

*प्रश्न क्रमांक २ मध्ये ४ **उपप्रश्न प्रत्येकी १ गुणाचे** आहेत.*

*(२) **विभाग ब –** प्रश्न क्रमांक ३ ते प्रश्न क्रमांक १४ मध्ये १२ लघूत्तरी प्रश्न आहेत, त्यांना **प्रत्येकी २ गुण** आहेत. (कोणतेही ८ प्रश्न सोडवा.)*

*(३) **विभाग क –** प्रश्न क्रमांक १५ ते प्रश्न क्रमांक २६ मध्ये १२ लघूत्तरी प्रश्न आहेत, त्यांना **प्रत्येकी ३ गुण** आहेत. (कोणतेही ८ प्रश्न सोडवा.)*

*(४) **विभाग ड –** प्रश्न क्रमांक २७ ते प्रश्न क्रमांक ३४ मध्ये ८ दीर्घोत्तरी प्रश्न आहेत, त्यांना **प्रत्येकी ४ गुण** आहेत. (कोणतेही ५ प्रश्न सोडवा.)*

(५) लॉग टेबलचा वापर करण्यास परवानगी आहे. गणनयंत्राचा वापर करण्यास परवानगी नाही.

(६) उजव्या बाजूस दिलेल्या संख्या प्रश्नांचे पूर्ण गुण दर्शवितात.

(७) आलेख कागदाचा वापर अनिवार्य नाही. फक्त कच्चा आलेख काढणे अपेक्षित आहे.

(८) बहुपर्यायी प्रश्नांचे मूल्यमापन हे पहिल्या प्रयत्नात सोडविलेल्या प्रश्नांसाठीच करण्यात येईल. अन्यथा गुण दिले जाणार नाहीत.

(९) प्रत्येक विभागाची सुरुवात नवीन पानावर करावी.

विभाग - अ

प्र. १. **खाली दिलेल्या बहुपर्यायी प्रकारच्या प्रश्नांखाली दिलेल्या पर्यायांमधून योग्य उत्तर निवडून लिहा :** **[१६]**

(i) $(p \vee q) \rightarrow (p \wedge q)$ या विधानाचा (statement pattern) व्यस्त (inverse) .... आहे.

(a) $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$

(b) $\sim (p \vee q) \rightarrow (p \wedge q)$

(c) $(\sim p \wedge \sim q) \rightarrow (\sim p \vee \sim q)$

(d) $(\sim p \vee \sim q) \rightarrow (\sim p \wedge \sim q)$ (२)

(ii) ΔABC मध्ये, जर $a = 2, b = 3$ आणि $\sin A = \frac{2}{3}$, तर $\angle B =$.......

(a) $\frac{\pi}{2}$ (b) $\frac{\pi}{3}$

(c) $\frac{\pi}{4}$ (d) $\frac{\pi}{6}$ (२)

(iii) जर $\overline{AB} = 2\hat{i} - 4\hat{j} + 7\hat{k}$ आणि आरंभबिंदू $A \equiv (1,5,0)$ तर टोकाचा बिंदू $B =$ .... आहे.

(a) (1, 3, 7) (b) (7, 3, 1)

(c) (1, 7, 3) (d) (3, 1, 7) (२)

(iv) रेषा $\bar{r} = (\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}) + \lambda(2\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k})$ आणि $\bar{r} = (\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}) + \mu(\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k})$ यामधील कोन .... आहे.

(a) $\frac{\pi}{4}$ (b) $\frac{\pi}{2}$

(c) $\frac{\pi}{3}$ (d) 0 (२)

(v) जर y हे x या चलाचे फल आहे आणि $\log(x + y) = xy$ तर $x = 0$ ह्या किंमतीसाठी $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ ची किंमत ...... असेल.

(a) 1 (b) –1

(c) 2 (d) 0 (२)

(vi) वेळ t असताना, एका कणाचे (particle) विस्थापन (displacement) $S = 2t^3 - 5t^2 + 4t - 3$ दिलेले आहे, तर वेळ $t = 1$ असतांना त्या कणाचे त्वरण .... असेल

(a) 2 (b) 8

(c) 10 (d) 14 (२)

(vii) $\sec^2 x \cdot \tan y \, dx + \sec^2 y \cdot \tan x \, dy = 0$
या विकलनीय समीकरणाची (differential equation) उकल .... आहे.

(a) $\tan x . \cot y = c$

(b) $\cot x - \cot y = c$

(c) $\tan x . \tan y = c$

(d) $\cot x - \tan y = c$ (२)

(viii) समजा X: बससाठी प्रतिक्षा वेळ मिनिटात आहे आणि संभाव्यता घनता फल (p.d.f.) आहे.

$$f(x) = \frac{1}{5}; \text{ जेव्हा } 0 \le x \le 5$$
$$= 0 \text{ ; अन्यथा}$$

तर 1 आणि 3 या दरम्यान प्रतिक्षा वेळेची संभाव्यता .... असेल.

(a) $\frac{1}{5}$ (b) $\frac{2}{5}$

(c) $\frac{3}{5}$ (d) $\frac{4}{5}$ (२)

प्र. २. **खालील प्रश्नांची उत्तरे लिहा :** **[४]**

(i) $\tan\theta = 0$ या समीकरणाची व्यापक उकल (general solution) काढा. (१)

(ii) सदिश (vector) $\bar{a} = 3\hat{i} + \hat{j} + 7\hat{k}$ चे परिमाण (magnitude) काढा. (१)

(iii) जर $y = \sin(\log x)$ तर $\frac{dy}{dx}$ काढा. (१)

(iv) सोडवा $\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ (१)

विभाग - ब

खालीलपैकी कोणतेही <u>आठ</u> प्रश्न सोडवा : **[१६]**

प्र. ३. सत्यता सारणीचा (truth-table) वापर करून सिद्ध करा :
$\sim p \wedge q \equiv (p \vee q) \wedge \sim p$ (२)

प्र. ४. $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ या सारणीच्या (matrix) घटकांचे (elements) सहगुणक (cofactors) काढा. (२)

प्र. ५. $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ या कार्तीय निर्देशक (cartesian co-ordinates) असलेल्या बिंदूचे ध्रुवीय निर्देशक (polar co-ordinates) काढा. (२)

प्र. ६. ΔABC मध्ये, जर $a = 2$, $b = 3$, $c = 4$ तर सिद्ध करा की, ΔABC हा विशाल कोन त्रिकोण आहे. (२)

प्र. ७. जर $\bar{a} = 3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}, \bar{b} = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$, तर $|\bar{a} \times \bar{b}|$ काढा. (२)

प्र. ८. $A(-1, 2, 3)$ या बिंदूमधून जाणाऱ्या प्रतलाचे व ज्याच्या स्तंभिकेचे (normal) दिक् अनुपात (direction ratios) 0, 2, 5 आहेत. त्या प्रतलाचे (plane) कार्तेशियन समीकरण (cartesian equation) काढा. (२)

प्र. ९. जर $x\sqrt{x}+y\sqrt{y}=a\sqrt{a}$ तर $\frac{dy}{dx}$ काढा. (२)

प्र. १०. सिद्ध करा की $y=x^3-6x^2+x+3$ या वक्राची (0, 3) या बिंदूतून जाणारी स्पर्शिका (tangent) $y=x+5$ या रेषेला समांतर आहे. (२)

प्र. ११. $f(x)=x^2-4x+3$ ह्या फलासाठी $x\in[1,3]$ या अंतराळात रोलेज प्रमेयाच्या (Rolle's theorem) अटी तपासा. (२)

प्र. १२. सोडवा : $\int \frac{dx}{x+x^{-10}}$ (२)

प्र. १३. सोडवा : $\int_0^{-1} e^{-x}dx$ (२)

प्र. १४. जर $X \sim B(n,p)$ व $E(X)=6, Var(X)=4.2,$ तर n आणि p काढा. (२)

विभाग - क

खालीलपैकी कोणतेही <u>आठ</u> प्रश्न सोडवा : **[२४]**

प्र. १५. ΔABC मध्ये, सिद्ध करा

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ (३)

प्र. १६. (2, 3) या बिंदूमधून जाणाऱ्या आणि $3x+2y-1=0$ व $x-3y+2=0$ या रेषांना लंब असणाऱ्या दोन रेषांचे संयुक्त समीकरण काढा. (३)

प्र. १७. जर $ax^2+2hxy+by^2=0$ या समीकरणाने दर्शविलेल्या रेषांमधील लघुकोन θ आहे तर सिद्ध करा की,

$$\tan\theta=\left|\frac{2\sqrt{h^2-ab}}{a+b}\right|$$ (३)

प्र. १८. त्रिकोणाच्या मध्यगा (medians) एकसंपाती (concurrent) असतात, हे सदिश पद्धतीने सिद्ध करा. (३)

प्र. १९. $A(-1, 2, -5)$ या बिंदूमधून जाणारे आणि सदिश (vector) $4\hat{i}-\hat{j}+3\hat{k}$ व $\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$ यांना समांतर (parallel) असणाऱ्या प्रतलाचे (plane) सदिश समीकरण (vector equation) काढा. (३)

प्र. २०. $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-3}{4}$ व $\frac{x-2}{3}=\frac{y-4}{4}=\frac{z-5}{5}$ या रेषांमधील किमान अंतर (shortest distance) काढा. (३)

प्र. २१. एका दंडगोलाकृती पात्राची (cylindrical vessel) तळत्रिज्या (base radius) 3 मीटर आहे. यामध्ये 27 m^3/सेकंद या दराने पाणी ओतले असता, पाण्याची पातळी वाढण्याचा (rising) दर काढा. (३)

प्र. २२. सोडवा : $\int \frac{\sin(x+a)}{\cos(x-b)}dx$ (३)

प्र. २३. $\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=x^3-3$ हे विकलनीय समीकरण (differential equation) सोडवा. (३)

प्र. २४. $y=c_1\cos(\log x)+c_2\sin(\log x)$ या समीकरणातील यादृच्छिक स्थिरांकांचे (arbitrary constants) विलोपन (eliminating) करून विकलनीय समीकरण (differential equation) मिळवा. (३)

प्र. २५. X चे संभाव्यता वितरण खालीलप्रमाणे आहे :

x	0	1	2	3	4
$P[X=x]$	0.1	k	$2k$	$2k$	k

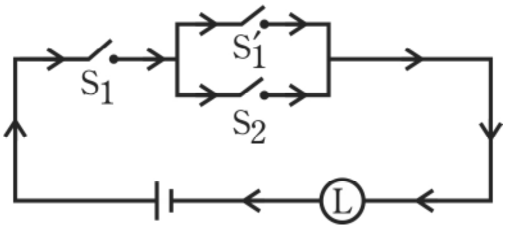
शोधा - (i) k (ii) $P(X<2)$ (iii) $P[1\le X<4]$ (३)

प्र. २६. पाच प्रश्नांपैकी प्रत्येकासाठी तीन संभाव्य उत्तरांसह बहुपर्यायी परीक्षेत विद्यार्थ्याला फक्त अंदाज करून चार अचूक उत्तरे मिळण्याची संभाव्यता किती आहे? (३)

विभाग - ड

खालीलपैकी कोणतेही पाच प्रश्न सोडवा : **[२०]**

प्र. २७. खालील विद्युत परीपथ (switching circuit) साठी पर्यायी समतुल्य (alternative equivalent) सरळ परिक्रमा (simple circuit) लिहा.



(४)

प्र. २८. तीन संख्याची बेरीज 2 आहे. पहिल्या आणि तिसऱ्या संख्येच्या बेरजेमध्ये दुसऱ्या संख्येची दुप्पट मिळविल्यास आपल्याला 0 (शून्य)मिळेल, दुसऱ्या आणि तिसऱ्या संख्येच्या बेरेजेच्या दुप्पटीत पहिल्या संख्येची पाचपट मिळविल्यास 7 मिळेल. सारणी पद्धतीचा (matrix method) वापर करून संख्या शोधा. (४)

प्र. २९. सदिश - त्रयीचा अदिश गुणाकार (scalar triple product) गुणधर्म (properties) वापरून सिद्ध करा.

$$[\bar{a}+\bar{b}\ \ \bar{b}+\bar{c}\ \ \bar{c}+\bar{a}] = 2[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}]$$ (४)

प्र. ३०. खालील रेषीय प्रयोजनात्मक प्रश्न (L.P.P.) आलेखीय पद्धतीने सोडवा :

कमाल (maximize) : $z = 9x + 13y$

अटी : $2x + 3y \le 18,$

$2x + y \le 10$

$x \ge 0, y \ge 0$ (४)

प्र. ३१. जर $x = f(t)$ आणि $y = g(t)$ हे t चे विकलनीय फल (differentiable function) जसे की y हे x चे फल आहे आणि $\frac{dx}{dt} \ne 0$, तर सिद्ध करा की :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}},$$

यावरून, जर $y = at^2$ आणि $x = 2at$ तर $\frac{dy}{dx}$ काढा. (४)

प्र. ३२. सिद्ध करा

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} \cdot dx = \frac{x}{2} \cdot \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \cdot \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$$ (४)

प्र. ३३. सोडवा :

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{(1-2x^2) \cdot \sqrt{1-x^2}}$$ (४)

प्र. ३४. $y^2 = 4x$ आणि $x^2 = 4y$ या अन्वस्तांमधील (parabolas) तयार होणाऱ्या सामाईक भागाचे (region) क्षेत्रफळ (area) काढा. (४)

◆◆◆