

DAY — 08

SEAT NUMBER

--	--	--	--	--	--

2025 VII 03

1100

J-389

(M)

**MATHEMATICS & STATISTICS (88)
(COMMERCE)**

Time : 3 Hrs.

(16 Pages)

Max. Marks : 80

- सूचना :
- (१) सर्व प्रश्न सोडविणे अनिवार्य आहे.
 - (२) एकूण ६ प्रश्न दोन विभागांत विभागले आहेत.
 - (३) विभाग-१ व विभाग-२ यांची उत्तरे एकाच उत्तरपुस्तिकेत लिहावयाची आहेत.
 - (४) आवश्यक असल्यास लॉगॅरिथम सारणी (logarithmic table) देण्यात येईल. गणन यंत्राचा वापर करण्यास मनाई आहे.
 - (५) रेषीय उपयोजन (L. P. P.) आणि वेळ मालिका (time series) प्रश्नांसाठी आलेख कागदाचा वापर करणे अनिवार्य नाही. फक्त कच्ची आकृती आलेख अपेक्षित आहे.
 - (६) प्रत्येक नवीन प्रश्नाच्या उत्तराचा प्रारंभ नवीन पानावर करावा.
 - (७) प्रत्येक वस्तुनिष्ठ प्रश्नांसाठी (प्र. १ आणि प्र. ४) फक्त पहिल्याच प्रयत्नास गुणदान केले जाईल.

विभाग - १

प्र. १. (अ) खालील दिलेल्या प्रत्येक उपप्रश्नाच्या विकल्पातून सर्वात योग्य पर्याय निवडा [१२]
व लिहा (प्रत्येकी १ गुण) : (६)

(i) जर सारणी (matrix) $B = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -3 & 0 & -4 \\ P & 4 & 0 \end{bmatrix}$ ही स्क्यू सममितीय (skew-

symmetric) असेल तर P ची किंमत असेल -

(अ) 1

(ब) -1

(क) 0

(ड) -3

(ii) जर $y = e^{\log x}$ तर $\frac{dy}{dx} = \dots\dots\dots$

(अ) $\frac{1}{x}$

(ब) $\frac{1}{2}$

(क) $\frac{e^{\log x}}{x}$

(ड) 0

(iii) $\int (1-x)^{-3} dx = \text{---}$

(अ) $\frac{1}{2}(1-x)^{-2} + c$

(ब) $\frac{1}{2}(1+x)^{-2} + c$

(क) $\frac{1}{2}(1-x)^{-2} + \frac{x}{2} + c$

(ड) $\frac{1}{2}(1-x)^{-2} - \frac{x}{2} + c$

(iv) जर $\int_0^a 3x^2 dx = 8$ तर $a = \dots\dots\dots$

(अ) 0

(ब) 2

(क) 8

(ड) $\frac{4}{3}$

(v) वक्र $y = x^2$, X-अक्ष आणि रेषा $x = 1$ व $x = 3$ यांनी बंदिस्त (bounded) केलेल्या जागेचे क्षेत्रफळ (area) $\dots\dots\dots$ आहे.

(अ) $\frac{3}{26}$ चौ. एकक

(ब) 3 चौ. एकक

(क) 26 चौ. एकक

(ड) $\frac{26}{3}$ चौ. एकक

(vi) $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = a^x$ ची क्रम (order) व कोटी (degree)

अनुक्रमे आहेत -

(अ) 1, 1

(ब) 1, 2

(क) 2, 1

(ड) 2, 2

(ब) खाली दिलेली विधाने सत्य किंवा असत्य आहे ते सांगा (प्रत्येकी १ गुण) : (३)

(i) $(p \wedge \sim q) \vee t$ चे द्वैत (dual) $(p \vee \sim q) \vee c$ आहे.

(ii) $\int \frac{x-1}{(x+1)^3} e^x dx = e^x \cdot f(x) + c$ जहाँ $f(x) = (x+1)^2$ आहे.

(iii) $\frac{dy}{dx} + y = e^{-x}$ चे एकत्रीकरण घटक (Integrating Factor) (I.F.) e^x आहे.

(क) खाली दिलेल्या रिक्त जागा भरा (प्रत्येकी १ गुण) : (३)

- (i) “काही पुरुष हे प्राणी आहेत” या विधानाचे नकारात्मक रूप (negation) ----- आहे.
- (ii) जर सरासरी उत्पन्न (average revenue) 45 व मागणीची लवचीकता (elasticity of demand) 3 असेल तर सीमांत उत्पन्न (marginal revenue) ----- असेल.
- (iii) $\int \frac{10x^9 + 10^x \cdot \log 10}{10^x + x^{10}} dx$ ची किंमत शोधण्यासाठी योग्य प्रतिस्थापन (proper substitution) ----- आहे.

प्र. २. (अ) खालीलपैकी कोणतेही दोन उपप्रश्न सोडवा (प्रत्येकी ३ गुण) : (६) [१४]

- (i) खालील विधान बंध (statement pattern) सत्य (tautology), परस्पर विरोध (contradiction) किंवा आकस्मिकता (contingency) ते तपासा.

$$[(p \wedge q) \vee (\sim p)] \vee [p \wedge (\sim q)]$$

- (ii) जर $y = (\log x)^x + x^5$ तर $\frac{dy}{dx}$ शोधा.
- (iii) अन्वस्त (parabola) $y^2 = 4x$ आणि रेषा (line) $x = 3$ यांनी बंदिस्त (bounded) केलेल्या जागेचे क्षेत्रफळ शोधा.

(ब) खालीलपैकी कोणतेही दोन उपप्रश्न सोडवा (प्रत्येकी ४ गुण) : (८)

- (i) सीमांत उपभोग प्रवृत्ती (MPC), सीमांत बचत प्रवृत्ती (MPS), सरासरी उपभोग प्रवृत्ती (APC) आणि सरासरी बचत प्रवृत्ती (APS) काढा.

जर एका व्यक्तीचा खर्च (expenditure) E_c त्याचे उत्पन्न (income)

I बरोबर असे दिलेले आहेत की $E_c = (0.0003) I^2 + (0.075) I$

जेव्हा $I = 1000$.

(ii) $x^2 \cdot y \, dx - (x^3 + y^3) \cdot dy = 0$ हे विकलन समीकरण

(differential equation) सोडवा.

(iii) खाली दिलेली समीकरणे सारणी (matrix) पद्धतीत लिहा व सोपान पद्धतीने (method of reduction) सोडवा :

$$x + 2y + z = 8, \quad 2x + 3y - z = 11, \quad \text{आणि}$$

$$3x - y - 2z = 5$$

प्र. ३. (अ) खालीलपैकी कोणतेही दोन उपप्रश्न सोडवा (प्रत्येकी ३ गुण) :

(६) [१४]

(i) खाली दिलेल्या विधानाचे विरुद्ध (converse), व्यस्त (inverse) आणि विपरीत (contrapositive) विधाने लिहा :

“जर एक पुरुष अविवाहित आहे तर तो आनंदी आहे”

(ii) सारणी (matrix) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ चे व्यस्त (inverse) संलग्न पद्धतीने

(adjoint method) शोधा.

(iii) जर $x^5 \cdot y^7 = (x + y)^{12}$ तर दाखवा $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$

(ब) खालीलपैकी कोणताही एक उपप्रश्न सोडवा (प्रत्येकी ४ गुण) :

(४)

(i) सोडवा : $\int x^2 \cdot e^{3x} dx$

(ii) सोडवा : $\int_1^4 \frac{\sqrt[3]{x+6}}{\sqrt[3]{x+6} + \sqrt[3]{11-x}} dx$

(क) खालीलपैकी कोणतीही एक कृती पूर्ण करा (प्रत्येकी ४ गुण) : (४)

(i) x ची किंमत शोधा ज्यासाठी फल $f(x)$ वाढत (increasing) आहे

$$f(x) = 2x^3 - 15x^2 - 144x - 7$$

उकल :

$$\text{दिले आहे : } f(x) = 2x^3 - 15x^2 - 144x - 7$$

$$\therefore f'(x) = 6x^2 - 30x - 144$$

$\therefore$ फल $f'(x) > 0$, $f(x)$ वाढत (increasing) आहे.

$$\therefore 6x^2 - 30x - 144 > 0$$

$$\therefore x^2 - 5x - 24 > 0$$

$$\therefore (x-8)(x+3) > 0$$

$$\text{अट I : } x-8 > 0 \text{ व } x+3 > 0$$

$$x > 8 \text{ व } x > -3$$

$$\therefore x > \boxed{}$$

$$\text{अट II : } x-8 < 0 \text{ व } x+3 < 0$$

$$x < 8 \text{ व } x < -3$$

$$\therefore x < \boxed{}$$

$$\therefore f(x) = 2x^3 - 15x^2 - 144x - 7$$

हे वाढत आहे जर आणि फक्त जर

$$x \in (-\infty, \boxed{}) \text{ किंवा } x \in (\boxed{}, \infty)$$

(ii) खालील विकलनीय समीकरण (differential equation) सोडवा व

त्यावरून विशिष्ट उकल (particular solution) शोधा.

जेव्हा $x = 0$, $y = 1$ असेल.

$$y^3 - \frac{dy}{dx} = x \frac{dy}{dx}$$

उकल :

$$y^3 = x \frac{dy}{dx} + \frac{dy}{dx}$$

$$\therefore y^3 = (x+1) \boxed{}$$

$$\therefore (x+1) dy = y^3 dx$$

चल वेगळे केल्यावर (separating the variables) प्राप्त झाले.

$$\frac{1}{y^3} dy = \frac{1}{x+1} dx$$

समाकलीत (integrating) केल्यावर

$$\therefore \int \frac{1}{y^3} dy = \int \frac{1}{x+1} dx$$

$$\therefore -\frac{1}{2y^2} = \boxed{} + c \quad \dots(I)$$

ही आवश्यक सामान्य उकल आहे

$\therefore$ समीकरण (I) मध्ये $x = 0$ व $y = 1$ घाला

$$-\frac{1}{2(1)^2} = \log |0+1| + c$$

$$\therefore \boxed{} = c$$

$$\therefore -\frac{1}{2y^2} = \boxed{} - \frac{1}{2}$$

ही विशिष्ट उकल आहे.

विभाग - २

प्र. ४. (अ) खाली दिलेल्या प्रत्येक उपप्रश्नाच्या विकल्पातून सर्वात योग्य पर्याय निवडा व लिहा. [१२]

(प्रत्येकी १ गुण) :

(६)

(i) देय रक्कम (sum due) ला देखील म्हणतात.

(अ) खरी सूट (true discount)

(ब) दर्शनी मूल्य (face value)

(क) वर्तमान मूल्य (present value)

(ड) रोख मूल्य (cash value)

(ii) विम्याचे विविध प्रकार खालील प्रकारे आहेत :

I. जीवन विमा (Life insurance)

II. आरोग्य विमा (Health insurance)

III. उत्तरदायित्व विमा (Liability insurance)

(अ) फक्त II

(ब) फक्त III

(क) फक्त I

(ड) वरील तिन्ही

(iii) $|b_{xy} + b_{yx}| \geq \text{---}$

(अ) $2|r|$

(ब) $2r$

(क) r

(ड) $|r|$

(iv) जर $P_{01}(L)=120.4$ व $P_{01}(P)=130.6$ तर $P_{01}(D-B) =$ आहे.

(अ) 25.1

(ब) 60.2

(क) 125.5

(ड) 65.3

- (v) $F(x)$ हे स्वतंत्र यादृच्छिक चर (discrete r.v.) X वर संचित वितरण फल (c.d.f) आहे. ज्याचे वितरण खालील प्रमाणे आहे :

X_i	-2	-1	0	1	2
P_i	0.2	0.3	0.15	0.25	0.1

तर $F(-3) = \dots\dots\dots$

- (अ) 1
(ब) 0.2
(क) 0.15
(ड) 0
- (vi) सतत यादृच्छिक चर X ची (continuous r.v.) संभाव्यता घनता फल (p.d.f.) पुढील प्रमाणे आहे -

$$f(x) = \frac{x^2}{3}, \quad -1 < x < 2 \text{ साठी}$$

$$= 0 \quad \text{अन्यथा}$$

तर $F(1) = \dots\dots\dots$

- (अ) $\frac{3}{9}$
(ब) $\frac{4}{9}$
(क) $\frac{1}{9}$
(ड) $\frac{2}{9}$

(ब) खालील दिलेली विधाने सत्य किंवा असत्य आहेत ते सांगा (प्रत्येकी १ गुण) : (३)

- (i) बँकर्स सूट (banker's discount) ला व्यावसायिक सूट (commercial discount) असेही म्हणतात.
- (ii) LPP च्या उद्दिष्ट चलाचे (objective function) इष्टतम मूल्य (optimum value) व्यवहार्य क्षेत्राच्या (feasible region) मध्यभागी (centre) उद्भवते.

(iii) जर $E(X) > \text{Var}(X)$ तर X द्विपदी वितरण (binomial distribution) होते.

(क) खाली दिलेल्या रिक्त जागा भरा (प्रत्येकी १ गुण) : (३)

- (i) $y \leq 0$ असमानतेचे (inequality) प्रतिनिधित्व करणारा भाग चतुष्पादात असेल.
- (ii) A, B, C, D या चार पुस्तकांना छापण्यासाठी लागणारा वेळ अनुक्रमे 5, 8, 10 व 7 तास आहे. त्यामध्ये माहिती भरण्यासाठी लागणारा वेळ अनुक्रमे 7, 4, 3 व 6 तास आहे. एकूण कमीतकमी लागणाऱ्या वेळेसाठी असलेला अनुक्रम ----- आहे.
- (iii) जर X ला पॉयसन वितरण (Poisson distribution) मापदंड (parameter) m बरोबर असेल व $P(X = 3) = P(X = 4)$ तर $m =$ -----

प्र. ५. (अ) खालीलपैकी कोणतेही दोन उपप्रश्न सोडवा (प्रत्येकी ३ गुण) : (६) [१४]

- (i) एका व्यक्तीला वर्षानंतर 4 त्याच्या निवृत्तीच्या वेळे पर्यंत ₹ 6,96,150 रक्कम जमवायची आहे. तो दर वर्षाच्या शेवटी काही रक्कम बँकेत गुंतविण्याचे ठरवितो जे त्याला द.सा.द.शे. 10 चक्रवाढ व्याज देईल. दर वर्षाला त्याने किती रक्कम गुंतवायला हवी?
- [वापरा : $(1.1)^4 = 1.4641$]

- (ii) खाली दिलेली माहिती जाहिरातीवर आलेला खर्च व विक्री याबद्दल आहे -

	जाहिरातीवर आलेला खर्च (₹ लाखात) (X)	विक्री (₹ लाखात) (Y)
अंकगणितीय मध्य (arithmetic mean)	10	90
प्रमाणित विचलन (standard deviation)	3	12

जर X व Y मधील सहसंबंध गुणांक 0.8 असेल तर -

- (अ) X वर Y चे प्रतिगमन समीकरण शोधा.
- (ब) जाहिरातीचे अंदाजपत्रक (budget) ₹ 15 लाख असताना होणारी संभावित विक्री (likely sales) किती?
- (iii) जर खाली दिलेल्या माहितीसाठी, राहणीमानाची किंमत (cost of living index) 200 असेल तर y शोधा.

गट	अन्न	कपडे	इंधन व बीज	घरभाडे	इतर
I	180	120	160	300	200
W	4	5	3	y	2

(ब) खालीलपैकी कोणतेही दोन उपप्रश्न सोडवा (प्रत्येकी ४ गुण): (८)

- (i) दिनांक 19 जानेवारी, 2015 रोजी काढलेली ₹ 5,475 ची 8 महिने मुदतीची हुंडी, 28 फेब्रुवारी, 2015 रोजी द.सा.द.शे. 8 प्रमाणे वटवली (discounted) तर बँकर्स सूट काय आहे? हुंडीचे रोख मूल्य काय आहे?

- (ii) खाली दिलेली सारणी वर्ष 1980 ते 1986 साठी भारतासाठी अर्भकाचे मृत्युदर (प्रति '000) दाखवत आहे :

वर्ष	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986
IMR	10	6	5	3	3	1	0

वरील दिलेल्या माहितीसाठी कमीतकमी वर्ग पद्धतीचा वापर करून प्रवृत्ती रेषा (trend line) काढा.

- (iii) चार नवीन यंत्रे M_1 , M_2 , M_3 व M_4 यंत्र दुकानात बसवायचे आहेत. एकूण पाच रिकाम्या जागा A , B , C , D व E उपलब्ध आहेत. मर्यादित जागेमुळे यंत्र M_2 C जागेवर व यंत्र M_3 A जागेवर बसवू शकत नाही. किंमत सारणी (cost matrix) खाली दिलेली आहे.

यंत्र	जागा				
	A	B	C	D	E
M_1	4	6	10	5	6
M_2	7	4	—	5	4
M_3	—	6	9	6	2
M_4	9	3	7	2	3

इष्टतम (optimal) सोपवणी (assignment) वेळापत्रक (schedule) शोधा.

प्र. ६. (अ) खालीलपैकी कोणतेही दोन उपप्रश्न सोडवा (प्रत्येकी ३ गुण) :

(६) [१४]

- (i) पुढील वेळ मालिकेसाठी (time series) 4 वार्षिक केंद्रित चलित सरासरी (4-yearly centred moving averages) मिळवा.

वर्ष	1981	1982	1983	1984	1985	1986
गुन्हे ('000)	40	42	43	42	44	44
वर्ष	1987	1988	1989	1990	1991	
गुन्हे ('000)	43	46	47	45	46	

- (ii) वॉल्श किंमत निर्देशांक क्रमांकाची (Walsch's price index number) गणना करा.

वस्तू	मूल वर्ष (Base Year)		चालू वर्ष (Current Year)	
	किंमत	प्रमाण	किंमत	प्रमाण
L	4	8	3	2
M	6	16	8	9
N	8	18	7	32

- (iii) दोन फासे 3 वेळा फेकले. जर एक सारखे अंक आल्यास यश (success) मिळत असेल तर यश मिळण्याची संभाव्यता शोधा.

(ब) खालीलपैकी कोणताही एक उपप्रश्न सोडवा (प्रत्येकी ४ अंक) : (४)

- (i) दोन प्रतिगमन (regression) रेषांची समीकरणे

$$8x - 10y + 66 = 0 \text{ तथा } 40x - 18y = 214$$

(अ) X व Y च्या सरासरी किंमती (mean values) शोधा.

(ब) X व Y मधील सहसंबंध गुणांक (correlation coefficient) काढा.

(ii) कमाल किंमत (maximize) काढा

$$\text{कमाल: } z = 60x + 50y$$

$$\text{अटी : } x + 2y \leq 40$$

$$3x + 2y \leq 60$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$

(क) खालीलपैकी कोणतीही एक कृती पूर्ण करा (प्रत्येकी ४ गुण):

(४)

- (i) 7 कामे प्रथम यंत्र A व नंतर यंत्र B या क्रमाने पूर्ण केलेली आहेत. प्रत्येक कामाचा प्रत्येक यंत्रावर लागणारा कालावधी खाली दिलेला आहे. यावरून कामाचा सर्वोत्कृष्ट क्रम (optimal sequence) शोधा व एकूण व्यतीत वेळ (total elapsed time) काढा. तसेच दोन्ही यंत्राचा निष्क्रिय (idle time) वेळ काढा.

कामे	I	II	III	IV	V	VI	VII
यंत्र A	7	16	19	10	14	15	5
यंत्र B	12	14	14	10	16	5	7

उकल :

इष्टतम अनुक्रम अल्गोरिदमचा वापर करून खालील इष्टतम

अनुक्रम मिळू शकतो.

☐	☐	IV	V	III	☐	☐
--------------------------	--------------------------	----	---	-----	--------------------------	--------------------------

एकूण व्यतीत वेळ खालील प्रमाणे प्राप्त होऊ शकतो.

कार्य	यंत्र A		यंत्र B	
	आत जाण्याचा वेळ	बाहेर जाण्याचा वेळ	आत जाण्याचा वेळ	बाहेर जाण्याचा वेळ
☐	0	5	5	12
☐	5	12	12	24
IV	12	22	24	34
V	22	36	36	52
III	36	55	55	69
☐	55	71	71	85
☐	71	86	86	91

एकूण व्यतीत वेळ T = 91 एकक

यंत्र A साठी निष्क्रिय वेळ = ☐ एकक

यंत्र B साठी निष्क्रिय वेळ = ☐ एकक

(ii) X चे संभवनीयता वितरण पुढील प्रमाणे आहे -

x	0	1	2	3	4
$P[X=x]$	0.1	k	$2k$	$2k$	k

शोधा :

(अ) k (ब) $P(X > 2)$ (क) $P(1 < X \leq 4)$

उकल :

वरील सारणी संभवनीयता वितरण देते, म्हणून

$$\sum P(X=x)=1$$

$$P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)=1$$

$$0.1+k+2k+2k+k=1$$

$$6k=1-0.1$$

$$6k=0.9$$

$$k=\boxed{}$$

$$P(X > 2) = P(X = 3) + P(X = 4)$$

$$= 2k + k$$

$$= \square$$

$$P(1 < X \leq 4) = P(X = \square) + P(X = 3) + P(X = 4)$$

$$= \square + 2k + k$$

$$= 0.75$$

