

DAY — 09

SEAT NUMBER

--	--	--	--	--	--

2025 II 22

1100

J-313

(M)

MATHEMATICS & STATISTICS (40) (ARTS & SCIENCE)

Time : 3 Hrs.

(8 Pages)

Max. Marks : 80

सूचना :

प्रश्नपत्रिका एकूण चार विभागांत विभागलेली आहे.

(१) विभाग अ – प्रश्न क्रमांक १ मध्ये ८ बहुपर्यायी प्रश्न प्रत्येकी २ गुणांचे आहेत.

प्रश्न क्रमांक २ मध्ये ४ उपप्रश्न प्रत्येकी १ गुणाचे आहेत.

(२) विभाग ब – विभागा मध्ये १२ लघुत्तरी प्रश्न आहेत, त्यांना प्रत्येकी २ गुण आहेत. (कोणतेही ८ प्रश्न सोडवा.)

(३) विभाग क – विभागा मध्ये १२ लघुत्तरी प्रश्न आहेत, त्यांना प्रत्येकी ३ गुण आहेत. (कोणतेही ८ प्रश्न सोडवा.)

(४) विभाग ड – विभागा मध्ये ८ दीर्घोत्तरी प्रश्न आहेत, त्यांना प्रत्येकी ४ गुण आहेत. (कोणतेही ५ प्रश्न सोडवा.)

(५) लॉग टेबलचा वापर करण्यास परवानगी आहे. गणनयंत्राचा वापर करण्यास परवानगी नाही.

(६) उजव्या बाजूस दिलेल्या संख्या प्रश्नांचे पूर्ण गुण दर्शवितात.

(७) आलेख कागदाचा वापर अनिवार्य नाही. फक्त कच्चा आलेख काढणे अपेक्षित आहे.

(८) बहुपर्यायी प्रश्नांचे मूल्यमापन हे पहिल्या प्रयत्नात सोडविलेल्या प्रश्नांसाठीच करण्यात येईल. अन्यथा गुण दिले जाणार नाहीत.

(९) प्रत्येक विभागाची सुरुवात नवीन पानावर करावी.

विभाग - अ

प्र. १. प्रत्येक उपप्रश्नासाठी खाली दिलेल्या पर्यायी उत्तरातून योग्य तो पर्याय निवडून खालील प्रश्नांची उत्तरे लिहा :

[१६]

- (i) जर $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ असेल तर खालील कोणते विधान सत्य नाही?
- (a) $\exists x \in A$ की जेथे $x + 3 = 8$
- (b) $\exists x \in A$ की जेथे $x + 2 < 9$
- (c) $\forall x \in A, x + 6 \geq 9$
- (d) $\exists x \in A$ की जेथे $x + 6 < 10$ (२)
- (ii) ΔABC मध्ये, $(a + b) \cdot \cos C + (b + c) \cdot \cos A + (c + a) \cdot \cos B$
= _____
- (a) $a - b + c$
- (b) $a + b - c$
- (c) $a + b + c$
- (d) $a - b - c$ (२)
- (iii) जर $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 13$ आणि $|\vec{a} \times \vec{b}| = 25$ तर $|\vec{a} \cdot \vec{b}| = \text{_____}$
- (a) 30
- (b) 60
- (c) 40
- (d) 45 (२)
- (iv) जर बिंदूचा स्थान सदिश (position vector) $4\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ असेल व यामधून जाणारी रेषा $-2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ या सदिश राशीला समांतर असेल तर त्या रेषेचे सदिश समीकरण (vector equation) = _____
- (a) $(4\hat{i} - \hat{j} - 2\hat{k}) + \lambda(-2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})$
- (b) $(4\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}) + \lambda(2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})$
- (c) $(4\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}) + \lambda(-2\hat{i} - \hat{j} - \hat{k})$
- (d) $(4\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}) + \lambda(-2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})$ (२)

- (v) समजा $f(1) = 3$, $f'(1) = -\frac{1}{3}$, $g(1) = -4$ आणि $g'(1) = -\frac{8}{3}$
असेल तर $\sqrt{[f(x)]^2 + [g(x)]^2}$ x ला अनुलक्षुन विकलन
(derivative) हा $x=1$ ला ———
- (a) $-\frac{29}{25}$ (b) $\frac{7}{3}$
(c) $\frac{31}{15}$ (d) $\frac{29}{15}$ (२)
- (vi) जर द्विपाद वितरणामध्ये (binomial distribution) मध्य (mean)
आणि विचरण (variance) हे अनुक्रमे १८ व १२ असतील तर
 $n =$ ———
- (a) 36 (b) 54
(c) 18 (d) 27 (२)
- (vii) $\int x^x (1 + \log x) dx =$ ———
- (a) $\frac{1}{2}(1 + \log x)^2 + c$
(b) $x^{2x} + c$
(c) $x^x \cdot \log x + c$
(d) $x^x + c$ (२)
- (viii) रेषा $y = x$, X-अक्ष व रेषा $x = -1$ व $x = 4$ यांनी व्यापलेल्या भागाचे
क्षेत्रफल चौ. एकका मध्ये = ———
- (a) $\frac{2}{17}$ (b) 8
(c) $\frac{17}{2}$ (d) $\frac{1}{2}$ (२)

प्र. २. खालील प्रश्नांची उत्तरे लिहा :

[४]

- (i) ' $\exists n \in N$ या विधानाचे नकारात्मक (negation) विधान लिहा असे
की $n+8 > 11$. (१)
- (ii) $\bar{u} = 8\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$ विरुद्ध (opposite) एकक सदिश (unit vector)
लिहा. (१)

- (iii) $\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}$ या विकलनीय समीकरणा (differential equation) चा क्रम (order) लिहा. (१)
- (iv) फलन $f(x)$, सर्व $x \in R$ ला सक्तीने वाढण्यासाठीची (strictly increasing) अट (condition) लिहा. (१)

विभाग – ब

खालीलपैकी कोणतेही आठ प्रश्न सोडवा :

[१६]

- प्र. ३. सत्यता सारणी (truth-table) वापरून $p \leftrightarrow q$ आणि $(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$ ही विधान नमुने (statement pattern) हे तार्किक दृष्ट्या समतुल्य (logically equivalent) आहेत असे दाखवा. (२)
- प्र. ४. $\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ या सारणीचा संलग्न सारणी (adjoint matrix) काढा. (२)
- प्र. ५. $\tan^2 \theta = 1$ या समीकरणाची सर्वसामान्य उकल (general solution) काढा. (२)
- प्र. ६. $x^2 - y^2 - 2x + 1 = 0$ ने दर्शविलेल्या रेषांचा छेदन बिंदूचा निर्देशांक (point of intersection) काढा. (२)
- प्र. ७. एक रेषा Y व Z -अक्षाशी धन दिशेला अनुक्रमे 45° व 60° कोन करते तर ती रेषा X -अक्षाशी धन दिशेला किती अंशाचा कोन करेल हे काढा. (२)
- प्र. ८. बिंदू $2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$ मधून जाणाऱ्या व सदिश (vector) $2\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ ला लंब (perpendicular) असणाऱ्या प्रतलाचे (plane) सदिश समीकरण (vector equation) काढा. (२)
- प्र. ९. संख्या २० चे असे दोन भाग करा की त्यांच्या वर्गांची बेरीज न्यूनतम (minimum) राहील. (२)
- प्र. १०. सोडवा : $\int x^9 \cdot \sec^2(x^{10}) dx$ (२)

प्र. ११. सोडवा : $\int \frac{1}{25-9x^2} dx$ (२)

प्र. १२. सोडवा : $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1-\sin x} dx$ (२)

प्र. १३. परवलय $y^2=16x$ आणि त्याची नाभिलंब लॅटस् रेक्टम (latus rectum) यांनी व्यापलेल्या भागाचे क्षेत्रफल काढा. (२)

प्र. १४. एका बस करिता जर X ला मिनिटांमध्ये प्रतीक्षा वेळ (waiting time) मानले असता जिचे संभाव्यता वितरण फलन (probability distribution function) खालील प्रमाणे असल्यास

$$f(x) = \frac{1}{5}; \text{ for } 0 \leq x \leq 5$$

= 0 अन्यथा, तर

(i) एक आणि तीन मिनिट दरम्यानचा प्रतीक्षा वेळ

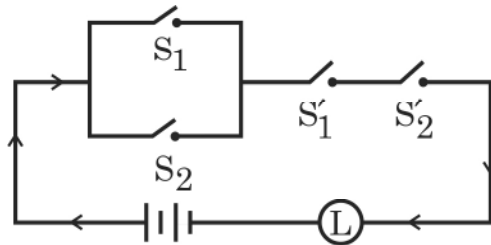
(ii) ४ पेक्षा जास्त मिनिटांचा प्रतीक्षा वेळ यांची संभाव्यता (probability) काढा. (२)

विभाग - क

खालीलपैकी कोणतेही आठ प्रश्न सोडवा :

[२४]

प्र. १५. खालील दिलेल्या विद्युत परिपथ (switching circuit) चिन्हांकित स्वरूपात (symbolic form) लिहा व त्याची विद्युत सारणी (switching table) तयार करा व अर्थ स्पष्ट करा :



(३)

- प्र. १६. सिद्ध करा : $2 \tan^{-1} \left(\frac{1}{3} \right) + \cos^{-1} \left(\frac{3}{5} \right) = \frac{\pi}{2}$ (३)
- प्र. १७. ΔABC मध्ये जर $a = 13$, $b = 14$, $c = 15$ तर खालील किंमती काढा.
(i) $\sec A$ (ii) $\operatorname{cosec} \frac{A}{2}$ (३)
- प्र. १८. एक रेषा बिंदू $(6, -7, -1)$ आणि $(2, -3, 1)$ मधून जात असेल तर त्या रेषेचे दिक् कोज्या व दिशा गुणोत्तरे (direction cosines and direction ratios) काढा. हे ही दाखवा की ती रेषा प्रारंभिक बिंदू (मूळ) (origin) मधून जात नाही. (३)
- प्र. १९. जर रेषा बिंदू $A(1, 2, 3)$ मधून जात असेल जिचे दिशा गुणोत्तर (direction ratios) $2, 3, 7$ असतील तर त्या रेषेचे कार्टेशियन व सदिश समीकरण (cartesian and vector equation) काढा. (३)
- प्र. २०. जर प्रतल बिंदू $A(1, 1, 2)$, $B(0, 2, 3)$ आणि $C(4, 5, 6)$ मधून जात असल्यास त्या प्रतलाचे सदिश समीकरण (vector equation) काढा. (३)
- प्र. २१. $\log x$ चे n^{th} विकलन (derivative) काढा. (३)
- प्र. २२. एक बिंदूचे (particle) t वेळा मधील विस्थापन $s = 2t^3 - 5t^2 + 4t - 3$ तर त्वरण (acceleration) 14 ft/sec^2 असल्यास वेळ (time), गती (velocity) आणि विस्थापन (displacement) काढा. (३)
- प्र. २३. वक्र $y = 2x^3 - x^2 + 2$ च्या बिंदू $\left(\frac{1}{2}, 2 \right)$ मधून जाणाऱ्या स्पर्शिकेचे (tangent) व साधारण (normal) समीकरण लिहा. (३)
- प्र. २४. तीन नाणी एकाच वेळी फेकली असता, जर X छापा (head) दर्शवत असेल तर त्या X चे अपेक्षित मूल्य (expected value) व विश्लेषण (variance) काढा. (३)
- प्र. २५. $x \frac{dy}{dx} = x \cdot \tan \left(\frac{y}{x} \right) + y$ हे विकलनीय समीकरण (differential equation) सोडवा. (३)

प्र. २६. ५२ पत्ते पिसलेल्या कॅटमधून प्रत्येक पत्ता निवडून परत कॅटमध्ये टाकून (with replacement) ५ पत्ते (cards) यशस्वीरित्या निवडले असतील तर संभाव्यता शोधा की

(i) सर्व ५ पत्ते (cards) इस्पिक (spade) आहेत.

(ii) त्यामधील एक ही पत्ता इस्पिक (spade) नाही.

(३)

विभाग - ड

खालीलपैकी कोणतेही पाच प्रश्न सोडवा :

[२०]

प्र. २७. प्राथमिक पंक्ती परिवर्तन (elementary row transformation) वापरून

दिलेल्या सारणीचा $\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ व्यस्त (inverse) काढा. (४)

प्र. २८. जर x आणि y मधील दोन कोटी चे (degree 2) एक जिनसी (homogeneous)

समीकरण जसे की $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ हे नेहमीच मूळबिंदूतून जाणाऱ्या

रेषांची जोडी दर्शविते असे सिद्ध करा जेव्हा $h^2 - ab \geq 0$ तसेच दाखवा की

$x^2 + y^2 = 0$ की हे समीकरण दोन रेषा दाखवत नाही. (४)

प्र. २९. समजा $\vec{a}$ आणि $\vec{b}$ हे नैकरेषीय सदिश आहेत. (non-collinear vectors)

सिद्ध करा की सदिश $\vec{r}$ हा $\vec{a}$ आणि $\vec{b}$ सोबत एकप्रतलीय (coplanar) असतो

तर आणि फक्त तर t_1 व t_2 असे एकमेव अदिश आहेत की $\vec{r} = t_1 \vec{a} + t_2 \vec{b}$

यावरून जर $\vec{r} = 2\hat{i} + 7\hat{j} + 9\hat{k}$, $\vec{a} = \hat{i} + 2\hat{j}$, $\vec{b} = \hat{j} + 3\hat{k}$ तर t_1 व t_2 ची

किंमत काढा. (४)

प्र. ३०. खालील रेषीय प्रयोजनात्मक प्रश्न (linear programming problem) आलेखीय

पद्धत वापरून सोडवा :

कमाल (maximize) : $z = 3x + 5y$

अटी (subject to) : $x + 4y \leq 24,$

$3x + y \leq 21,$

$x + y \leq 9,$

$x \geq 0, y \geq 0$

आणि (z) ची कमाल (maximize) किंमत काढा.

(४)

प्र. ३१. जर $x = f(t)$ आणि $y = g(t)$ हे t चे विकलनीय फल (differentiable function) असेल जेव्हा y हे x चे विकलनीय फल असेल आणि $\frac{dx}{dt} \neq 0$, तर सिद्ध करा की :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}, \text{ आणि } 7^x \text{ चे } x^7 \text{ अनुलक्षुन विकलन (derivative) काढा.} \quad (४)$$

प्र. ३२. सोडवा : $\int e^{\sin^{-1} x} \left(\frac{x + \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx$ (४)

प्र. ३३. सिद्ध करा की : $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(a+b-x) dx$ यावरून सोडवा

$$\int_0^3 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{3-x}} dx \quad (४)$$

प्र. ३४. जर खोलीचे तापमान 25°C असताना वस्तूचे तापमान 80°C पासून 50°C पर्यंत थंड होण्यास 30 मिनिटे लागतात त्या वस्तूचे तापमान १ तासानंतर किती होईल ते काढा. (४)

