DAY —— 08 SEAT NUMBER | | | | | | |

2024	VII	25	1100	J-175	(M)

MATHEMATICS & STATISTICS (40)
(ARTS & SCIENCE)

Time : 3 Hrs. **(8 Pages)** **Max. Marks : 80**

सर्वसामान्य सूचना : *प्रश्नपत्रिकेमध्ये एकूण ३४ प्रश्न आहेत आणि* ***चार*** *विभागांत विभागलेली आहे.*

(१) ***विभाग अ*** – *प्रश्न क्रमांक* **१** *मध्ये* ***एकूण ८ बहुपर्यायी प्रश्न प्रत्येकी दोन गुणांचे*** *आहेत.*
प्रश्न क्रमांक **२** *मध्ये अतिलघू उत्तरांचे* ***एकूण चार प्रश्न प्रत्येकी एक गुणाचे*** *आहेत.*

(२) ***विभाग ब*** – *प्रश्न क्रमांक* **३** *ते प्रश्न क्रमांक* **१४** ***प्रत्येकी दोन गुणांचे*** *लघूत्तरी* ***बारा*** *प्रश्न आहेत. (कोणतेही* ***आठ*** *प्रश्न सोडवा.)*

(३) ***विभाग क*** – *प्रश्न क्रमांक* **१५** *ते प्रश्न क्रमांक* **२६** ***प्रत्येकी तीन गुणांचे*** *लघूत्तरी* ***बारा*** *प्रश्न आहेत. (कोणतेही* ***आठ*** *प्रश्न सोडवा.)*

(४) ***विभाग ड*** – *प्रश्न क्रमांक* **२७** *ते प्रश्न क्रमांक* **३४** ***प्रत्येकी चार गुणांचे*** *दीर्घोत्तरी* ***आठ*** *प्रश्न आहेत. (कोणतेही* ***पाच*** *प्रश्न सोडवा)*

(५) *लॉग टेबलचा वापर करण्यास परवानगी आहे. गणनयंत्राचा (calculator) वापर करण्यास परवानगी नाही.*

(६) *उजव्या बाजूस दिलेल्या संख्या प्रश्नांचे पूर्ण गुण दर्शवितात.*

(७) *आलेख कागदाचा वापर अनिवार्य नाही. फक्त कच्चा आलेख काढणे अपेक्षित आहे.*

(८) *बहुपर्यायी प्रश्नांचे उत्तरे त्यांच्या संकेताक्षरांसह लिहिणे आवश्यक आहे.*
उदा. : (अ)..... / (ब)..... / (क)..... / (ड).....
केवळ योग्य उत्तर किंवा त्याचे अक्षर (alphabet) लिहिल्यास गुण दिले जाणार नाहीत. बहुपर्यायी प्रश्नांचे मूल्यमापन हे पहिल्या प्रयत्नात सोडवलेल्या प्रश्नांसाठीच करण्यात येईल.

(९) *प्रत्येक विभागाची सुरुवात नवीन पानावर करावी.*

विभाग - अ

प्र. १. प्रत्येक उपप्रश्नासाठी खाली दिलेल्या पर्यायी उत्तरातून योग्य तो पर्याय निवडून खालील प्रश्नांची उत्तरे लिहा : [१६]

(i) $\cos\left[\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right]=$ ——

(अ) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (ब) $\frac{1}{2}$

(क) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (ड) $\frac{\pi}{4}$ (२)

(ii) जर θ हा कोणत्याही दोन $\bar{a}$ आणि $\bar{b}$ या सदिशांमधील कोन असेल व $|\bar{a}\cdot\bar{b}|=|\bar{a}\times\bar{b}|$ तर θ = ——

(अ) 0 (ब) $\frac{\pi}{4}$ or $\frac{3\pi}{4}$

(क) $\frac{\pi}{2}$ (ड) π or $\frac{\pi}{6}$ (२)

(iii) $\bar{r}=(\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k})+\lambda(3\hat{i}+2\hat{j}+6\hat{k})$ आणि

$\bar{r}=(5\hat{i}-2\hat{j}+7\hat{k})+\mu(\hat{i}+2\hat{j}+2\hat{k})$

या रेषांमधील कोन —— आहे.

(अ) $\cos^{-1}\left(\frac{17}{21}\right)$ (ब) $\cos^{-1}\left(\frac{20}{21}\right)$

(क) $\cos^{-1}\left(\frac{18}{21}\right)$ (ड) $\cos^{-1}\left(\frac{19}{21}\right)$ (२)

(iv) $\bar{r}\cdot(2\hat{i}+3\hat{j}-\hat{k})=5$ या प्रतलाचे आरंभबिंदू पासूनचे लंबांतर (perpendicular distance) —— आहे.

(अ) $\frac{5}{\sqrt{14}}$ एकक (ब) $\frac{5}{14}$ एकक

(क) 5 एकक (ड) $\frac{\sqrt{14}}{5}$ एकक (२)

(v) जर $x = e^{\frac{x}{y}}$ तर $\frac{dy}{dx} =$ ——

(अ) $1-\frac{y}{x}$ (ब) $1+\frac{y}{x}$

(क) $\frac{x-y}{x\log x}$ (ड) $\frac{x+y}{x\log x}$ (२)

(vi) —— ची उकल (solution) $y = c^2 + \frac{c}{x}$ आहे.

(अ) $x^4\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - x\frac{dy}{dx} - y = 0$

(ब) $x^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y = 0$

(क) $x^3\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) - x\frac{dy}{dx} + y = 0$

(ड) $x\frac{d^2y}{dx^2} = 4y$ (२)

(vii) $X \sim B(n, p)$ दिलेले असताना जर $n = 10$ आणि $p = 0.4$ असेल तर अनुक्रमे $E(X)$ आणि $Var(X)$ —— आहेत.

(अ) 4, 0.24

(ब) 0.4, 0.24

(क) 4, 2.4

(ड) 3, 0.24 (२)

(viii) $1^\circ = 0.0175^c$ दिले असता $\tan(44^\circ 30')$ चे अंदाजे मूल्य (approximate value) —— आहे.

(अ) 0.8952 (ब) 0.9528

(क) 0.9285 (ड) 0.9825 (२)

प्र. २. खालील प्रश्नांची उत्तरे लिहा : **[४]**

(i) $2x + y = 0$ आणि $3x - y = 0$ या रेषायुग्माचे एकत्रित समीकरण (combined equation) काढा. (१)

(ii) $\sin^{-1}\left(\sin\frac{5\pi}{3}\right)$ ची किंमत काढा. (१)

(iii) सोडवा : $\int\frac{5^x}{3^x}dx$ (१)

(iv) $\frac{dy}{dx} + y = e^{-x}$ या विकलन समीकरणाचे संकलन गुणक (integrating factor) लिहा. (१)

विभाग - ब

खालीलपैकी कोणतेही <u>आठ</u> प्रश्न सोडवा : **[१६]**

प्र. ३. जर p, q ही विधाने सत्य आहेत आणि r, s ही विधाने असत्य आहेत, तर $(q \wedge r) \vee (\sim p \wedge s)$ या विधानाचे सत्यता मूल्य शोधा. (२)

प्र. ४. प्राथमिक पंक्ती परिवर्तनाने (elementary row transformation) $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ या सारणीचा (matrix) व्यस्त (inverse) काढा. (२)

प्र. ५. ज्या बिंदूचे कार्तेशियन निर्देशक (cartesian co-ordinates) $(1, -\sqrt{3})$ आहेत, त्या बिंदूचे ध्रुवीय निर्देशक (polar co-ordinates) काढा. (२)

प्र. ६. $xy + y^2 = 0$ या समीकरणाने दर्शविलेल्या रेषांमधील लघुकोन (acute angle) काढा. (२)

प्र. ७. सत्यता सारणीचा उपयोग करून $p \rightarrow (q \rightarrow p)$ हे पुनरुक्ती (tautology) विधान आहे हे दाखवा. (२)

प्र. ८. जर $\tan^{-1}(2x) + \tan^{-1}(3x) = \frac{\pi}{4}$ तर x ची किंमत काढा, जेव्हा $0 < 3x < 1$ असेल. (२)

प्र. ९. जर $y = x^3 - 6x^2 + x + 3$ या वक्राच्या स्पर्शिका $y = x + 5$ या रेषेस समांतर आहेत, तर वक्रावरील स्पर्श बिंदू काढा. (२)

प्र. १०. सोडवा : $\int \frac{e^x(1+x)dx}{\sin^2(xe^x)}$ (२)

प्र. ११. एका कणाचे (particle) 't' या वेळेला $s = 2t^3 - 5t^2 + 4t - 3$ हे विस्थापन (displacement) दिले आहे. जेव्हा त्वरण (acceleration) 14 ft/sec^2 आहे. तेव्हा वेळ (time) काढा. (२)

प्र. १२. सोडवा : $\int_0^{\pi/4} \sqrt{1+\sin 2x}\, dx$ (२)

प्र. १३. X चे संभाव्यता वितरण (probability distribution) खालील प्रमाणे आहे.

$X = x$	0	1	2	3	4
$P(X = x)$	0.1	k	$2k$	$2k$	k

तर (अ) k

(ब) $P(X < 2)$ काढा. (२)

प्र. १४. $r\frac{dr}{d\theta} + \cos\theta = 5$ चे $r = \sqrt{2}$ आणि $\theta = 0$ ला विशिष्ट उत्तर (particular solution) काढा. (२)

विभाग - क

खालीलपैकी कोणतेही <u>आठ</u> प्रश्न सोडवा : [२४]

प्र. १५. ΔABC मध्ये, जर $a \cos A = b \cos B$ असेल, तर तो त्रिकोण काटकोन किंवा समद्विभुज त्रिकोण आहे. हे सिद्ध करा. (३)

प्र. १६. $A(1, -1, 1)$, $B(-1, 1, 1)$, $C(1, 1, 1)$ आणि $D(2, -3, 4)$ हे चार बिंदू एकप्रतलीय आहेत का? तुमचे उत्तर स्पष्ट (Justify) करा. (३)

प्र. १७. $(\tan^2\theta + \cos^2\theta)x^2 - 2xy\tan\theta + (\sin^2\theta)y^2 = 0$ या समीकरणाने प्रदर्शित केलेल्या रेषांच्या चढांमधील फरक काढा. (३)

प्र. १८. $(\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k})$ या बिंदूमधून जाणारी आणि $\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ व $2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ या सदिशांना लंब असणाऱ्या रेषेचे सदिश समीकरण (vector equation) काढा. (३)

प्र. १९. समजा $\bar{a}$ आणि $\bar{b}$ हे नैकरेषीय सदिश आहेत. सिद्ध करा की, सदिश $\bar{r}$ हा $\bar{a}$ आणि $\bar{b}$ सोबत एक प्रतलीय आहे तर आणि फक्त तर (if and only if) t_1 व t_2 असे एकमेव अदिश आहेत की $\bar{r} = t_1\bar{a} + t_2\bar{b}$ यावरून जर $\bar{r} = \hat{i} + \hat{j}$, $\bar{a} = 2\hat{i} - \hat{j}$, $\bar{b} = \hat{i} - 2\hat{j}$ तर t_1 व t_2 ची किंमती काढा.. (३)

प्र. २०. $x + 2y + 3z + 4 = 0$ आणि $4x + 3y + 2z + 1 = 0$ या प्रतलांच्या छेदातून व आरंभबिंदूतून (origin) जाणाऱ्या प्रतलाचे (plane) समीकरण काढा. (३)

प्र. २१. जर $y = \tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{3-x}{3+x}}\right)$ तर $\frac{dy}{dx}$ काढा. (३)

प्र. २२. $f(x) = x^3 + 5x^2 - 2x + 3$ ची $x = 1.98$ ला अंदाजे मूल्य (approximate value) काढा. (३)

प्र. २३. सोडवा : $\int \frac{\sin(x+a)}{\cos(x-b)}\,dx$ (३)

प्र. २४. $dr + (2r\cot\theta + \sin 2\theta)d\theta = 0$ हे विकलनीय समीकरण (differential equation) सोडवा. (३)

प्र. २५. समजा $X \sim B(10, 0.2)$, तर काढा.

(अ) $P(X = 1)$

(ब) $P(X \geq 1)$ (३)

प्र. २६. X ह्या अनिर्बंध चलाचे (r.v.) संभवनीयता राशीफल (PMF) खालीलप्रमाणे दिले आहे.

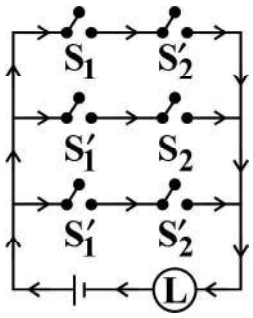
$X = x$	1	2	3
$P(X)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$

तर X चे अपेक्षित मूल्य (expected value), विचरण (variance) आणि प्रमाणित विचलन (standard deviation) काढा. (३)

विभाग - ड

खालीलपैकी कोणतेही <u>पाच</u> प्रश्न सोडवा : [२०]

प्र. २७. खालील परिपथाला (circuit) पर्यायी व्यवस्था (alternative arrangement) द्या की, नवीन परिपथाला कमीतकमी (minimum) बटने (switches) असतील.



(४)

प्र. २८. जर $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ तर संलग्न पद्धतीने (adjoint method) A^{-1} काढा. (४)

प्र. २९. ΔABC मध्ये, D आणि E बिंदू BC व AC वर अनुक्रमे आहेत. जसे $BD = 2DC$ आणि $AE = 3EC$. समजा P हा बिंदू AD व BE चा छेदन बिंदू (point of intersection) असेल तर सदिश पद्धतीने (vector method) $\frac{BP}{PE}$ हे गुणोत्तर (ratio) काढा. (४)

प्र. ३०. एक निर्माता A आणि B अशी दोन उत्पादने तयार करतो. त्यावर प्रत्येक एककाला अनुक्रमे ₹3 व ₹4 नफा (profit) मिळवितो. प्रत्येक उत्पादन दोन मशीन M_1 आणि M_2 यांवर तयार होते. उत्पादन A तयार करण्यासाठी मशीन M_1 वर एक मिनिट वेळ आणि मशीन M_2 वर 2 मिनिटे वेळ लागतो. तसेच, उत्पादन B तयार करण्यासाठी मशीन M_1 वर एक मिनिट आणि मशीन M_2 वर 1 मिनिट इतका वेळ लागतो.
कोणत्याही कामाच्या दिवशी मशीन M_1 हे वापरासाठी 450 मिनिटापेक्षा जास्त वेळ उपलब्ध नाही. त्यावेळेस, मशीन M_2 हे वापरासाठी 600 मिनिटासाठी उपलब्ध आहे. जास्तीत जास्त (कमाल) नफा मिळविण्यासाठी A आणि B चे किती एकक उत्पादन घ्यावे लागेल ते काढा. (४)

प्र. ३१. जर $y = f(u)$, हे u चे विकलनीय फल (differentiable function) आहे. आणि $u = g(x)$ हे x चे विकलनीय फल आहे. असे की $y = f[g(x)]$ हे संयुक्त फल (composite function) x चे विकलनीय फल आहे. तर सिद्ध करा –

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$, यावरून $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt{\sin x}}\right)$ काढा. (४)

प्र. ३२. सोडवा : $\int x^2 \sin 3x \, dx.$ (४)

प्र. ३३. सिद्ध करा :

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx \text{ , जर } f \text{ सम फल आहे. (even function)}$$

$$= 0 \qquad \text{, जर } f \text{ विषम फल आहे. (odd function)}$$

यावरून $\int_{-1}^{1} \tan^{-1} x \, dx$ ची किंमत काढा. (४)

प्र. ३४. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ या विवृत्ताचे (ellipse) चे क्षेत्रफल (area) काढा.

यावरून $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ चे क्षेत्रफळ काढा. (४)

◆◆◆