

DAY — 08

SEAT NUMBER

--	--	--	--	--	--

2024 VII 25

1100

J-177

(H)

MATHEMATICS & STATISTICS (40) (ARTS & SCIENCE)

Time : 3 Hrs.

(8 Pages)

Max. Marks : 80

सामान्य सूचनाएँ :

प्रश्न पत्र को चार विभागों में विभाजित किया गया है।

- (१) विभाग अ : प्रश्न क्रमांक १ में आठ बहुविकल्पीय प्रकार के उपप्रश्न हैं। प्रत्येक को दो अंक दिए गए हैं।
प्रश्न क्रमांक २ में चार अतिलघुउत्तरीय प्रश्न हैं। प्रत्येक को एक अंक दिया गया है।
- (२) विभाग ब : प्रश्न क्रमांक ३ से प्रश्न क्रमांक १४ तक बारह लघुउत्तरीय प्रश्नों में से प्रत्येक को दो अंक दिए गए हैं।
(किन्हीं आठ प्रश्नों को हल कीजिए।)
- (३) विभाग क : प्रश्न क्रमांक १५ से प्रश्न क्रमांक २६ तक बारह लघुउत्तरीय प्रश्नों में से प्रत्येक को तीन अंक दिए गए हैं।
(किन्हीं आठ प्रश्नों को हल कीजिए।)
- (४) विभाग ड : प्रश्न क्रमांक २७ से प्रश्न क्रमांक ३४ तक आठ दीर्घउत्तरीय प्रश्नों में से प्रत्येक को चार अंक दिए गए हैं।
(किन्हीं पाँच प्रश्नों को हल कीजिए।)
- (५) लॉग सारिणी का उपयोग किया जा सकता है। परिगणक (calculator) का उपयोग नहीं किया जा सकता।
- (६) दाहिनी ओर दिए गए अंक प्रश्नों के पूर्णांक हैं।
- (७) आलेख पत्र (graph paper) के उपयोग की आवश्यकता नहीं है। सिर्फ कच्ची आलेख आकृति उपेक्षित है।
- (८) प्रत्येक बहुविकल्पीय प्रश्नों का सही उत्तर उसके अक्षर (alphabetical letter) के साथ लिखना अनिवार्य है। उदा : (अ)..... / (ब)..... / (क)..... / (ड)..... सिर्फ सही उत्तर या उसके अक्षर (alphabet) लिखने पर अंक नहीं दिए जाएँगे। सिर्फ प्रथम प्रयास को ही मूल्यांकन के लिए लिया जाएगा।
- (९) प्रत्येक नए विभाग की शुरुआत नए पृष्ठ से करें।

विभाग - अ

प्र. १. निम्नलिखित बहुवैकल्पिक प्रश्नों के उत्तरों में से सही उत्तर चुनिए व लिखिए : [१६]

(i) $\cos \left[\tan^{-1} \left(\frac{1}{3} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{1}{2} \right) \right] = \text{---}$

(अ) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(ब) $\frac{1}{2}$

(क) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

(ड) $\frac{\pi}{4}$

(२)

(ii) यदि $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ के बीच का कोण θ है तथा $|\vec{a} \cdot \vec{b}| = |\vec{a} \times \vec{b}|$ तो $\theta = \text{---}$ होगा।

(अ) 0

(ब) $\frac{\pi}{4}$ या $\frac{3\pi}{4}$

(क) $\frac{\pi}{2}$

(ड) π या $\frac{\pi}{6}$

(२)

(iii) $\vec{r} = (\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}) + \lambda(3\hat{i} + 2\hat{j} + 6\hat{k})$ तथा

$$\vec{r} = (5\hat{i} - 2\hat{j} + 7\hat{k}) + \mu(\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k})$$

तो इन रेखाओं के बीच का कोण --- होगा।

(अ) $\cos^{-1} \left(\frac{17}{21} \right)$

(ब) $\cos^{-1} \left(\frac{20}{21} \right)$

(क) $\cos^{-1} \left(\frac{18}{21} \right)$

(ड) $\cos^{-1} \left(\frac{19}{21} \right)$

(२)

(iv) मूल बिंदु से प्रतल $\vec{r} \cdot (2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}) = 5$ की लंबवत् दूरी --- होगी।

(अ) $\frac{5}{\sqrt{14}}$ इकाई

(ब) $\frac{5}{14}$ इकाई

(क) 5 इकाई

(ड) $\frac{\sqrt{14}}{5}$ इकाई

(२)

- (v) यदि $x = e^{\frac{x}{y}}$ तो $\frac{dy}{dx} = \text{---}$
- (अ) $1 - \frac{y}{x}$ (ब) $1 + \frac{y}{x}$
- (क) $\frac{x-y}{x \log x}$ (ड) $\frac{x+y}{x \log x}$ (२)

- (vi) $y = c^2 + \frac{c}{x}$ यह --- का हल है।
- (अ) $x^4 \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - x \frac{dy}{dx} - y = 0$
- (ब) $x^2 \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + y = 0$
- (क) $x^3 \left(\frac{d^2y}{dx^2} \right) - x \frac{dy}{dx} + y = 0$
- (ड) $x \frac{d^2y}{dx^2} = 4y$ (२)

- (vii) दिया है, $X \sim B(n, p)$. यदि $n = 10$ तथा $p = 0.4$ तो $E(X)$ तथा $Var(X)$ के मान क्रमशः --- होंगे।
- (अ) 4, 0.24
- (ब) 0.4, 0.24
- (क) 4, 2.4
- (ड) 3, 0.24 (२)

- (viii) दिया है, $1^\circ = 0.0175^\circ$ तो $\tan(44^\circ 30')$ का सन्निकट मान --- होगा।
- (अ) 0.8952 (ब) 0.9528
- (क) 0.9285 (ड) 0.9825 (२)

प्र. २. निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए :

[४]

(i) $2x + y = 0$ तथा $3x - y = 0$; इन रेखाओं की जोड़ी का संयुक्त समीकरण ज्ञात कीजिए। (१)

(ii) $\sin^{-1}\left(\sin \frac{5\pi}{3}\right)$ का मान ज्ञात कीजिए। (१)

(iii) ज्ञात कीजिए : $\int \frac{5^x}{3^x} dx$ (१)

(iv) $\frac{dy}{dx} + y = e^{-x}$, इस अवकल समीकरण का समाकलनीय गुणक (integrating factor (I.F.)) लिखिए। (१)

विभाग - ब

निम्नलिखित प्रश्नों में से किन्हीं आठ प्रश्नों को हल कीजिए :

[१६]

प्र. ३. यदि p तथा q सत्य कथन तथा r, s यह असत्य कथन हैं तो निम्नलिखित विधान बंध का सत्यता मूल्य ज्ञात कीजिए :

$$(q \wedge r) \vee (\sim p \wedge s) \quad (२)$$

प्र. ४. प्राथमिक पंक्ति परिवर्तन (elementary row transformation) का उपयोग करके निम्नलिखित व्यूह का प्रतिलोम (inverse) व्यूह ज्ञात कीजिए:

$$\text{जहाँ } A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad (२)$$

प्र. ५. किसी बिंदु के कार्तीय निर्देशांक $(1, -\sqrt{3})$ हैं तो बिंदु के ध्रुवीय (polar) निर्देशांक ज्ञात कीजिए। (२)

प्र. ६. $xy + y^2 = 0$ से निरूपित रेखाओं के बीच स्थित न्यून कोण (acute angle) ज्ञात कीजिए। (२)

प्र. ७. सत्यता सारिणी का उपयोग करके सिद्ध कीजिए कि विधान बंध $p \rightarrow (q \rightarrow p)$ एक पुनरुक्ति (tautology) है। (२)

प्र. ८. यदि $\tan^{-1}(2x) + \tan^{-1}(3x) = \frac{\pi}{4}$, जहाँ $0 < 3x < 1$ तो x का मान ज्ञात कीजिए। (२)

प्र. ९. वक्र $y = x^3 - 6x^2 + x + 3$ पर स्थित उन बिंदुओं के निर्देशांक ज्ञात कीजिए जिन पर स्पर्श करने वाली स्पर्शिकाएँ रेखा $y = x + 5$ के समान्तर हैं। (२)

प्र. १०. ज्ञात कीजिए : $\int \frac{e^x(1+x)dx}{\sin^2(xe^x)}$ (२)

प्र. ११. समय t पर बिंदुकण का विस्थापन $s = 2t^3 - 5t^2 + 4t - 3$ से दिया गया है। यदि त्वरण 14 ft/sec^2 है, तो समय ज्ञात कीजिए। (२)

प्र. १२. ज्ञात कीजिए : $\int_0^{\pi/4} \sqrt{1 + \sin 2x} dx$ (२)

प्र. १३. X के लिए संभाव्यता वितरण निम्नलिखित है :

$X = x$	0	1	2	3	4
$P(X = x)$	0.1	k	$2k$	$2k$	k

ज्ञात कीजिए : (अ) k

(ब) $P(X < 2)$ (२)

प्र. १४. $r \frac{dr}{d\theta} + \cos \theta = 5$ का $r = \sqrt{2}$ तथा $\theta = 0$ के लिए विशेष हल (particular solution) ज्ञात कीजिए। (२)

विभाग - क

निम्नलिखित प्रश्नों में से किन्हीं आठ प्रश्नों को हल कीजिए :

[२४]

प्र. १५. ΔABC में यदि $a \cos A = b \cos B$ तो सिद्ध कीजिए कि त्रिभुज या तो समकोण है या समद्विबाहु है। (३)

प्र. १६. क्या $A(1, -1, 1)$, $B(-1, 1, 1)$, $C(1, 1, 1)$ तथा $D(2, -3, 4)$ एक प्रतलीय हैं? उचित तर्क देकर उत्तर दीजिए। (३)

प्र. १७. $(\tan^2 \theta + \cos^2 \theta)x^2 - 2xy \tan \theta + (\sin^2 \theta)y^2 = 0$ से, दर्शाई गई रेखाओं के ढाल (slopes) में अंतर ज्ञात कीजिए। (३)

प्र. १८. बिंदु $(\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k})$ से गुजरने वाली रेखा का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए यदि रेखा सदिश $\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ तथा सदिश $2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ के लंबवत् है। (३)

प्र. १९. माना $\bar{a}$ और $\bar{b}$ अरैखिक (non-collinear) सदिश हैं। यदि $\bar{r}$, $\bar{a}$ तथा $\bar{b}$ के साथ प्रतलीय हैं तो सिद्ध कीजिए कि अद्वितीय अदिश t_1 और t_2 इस प्रकार हैं कि $\bar{r} = t_1 \bar{a} + t_2 \bar{b}$ अतः $\bar{r} = \hat{i} + \hat{j}$, $\bar{a} = 2\hat{i} - \hat{j}$, $\bar{b} = \hat{i} - 2\hat{j}$ के लिए t_1 तथा t_2 का मान ज्ञात कीजिए। (३)

प्र. २०. $x + 2y + 3z + 4 = 0$ तथा $4x + 3y + 2z + 1 = 0$, प्रतलों के प्रतिच्छेदन से गुजरने वाले तथा मूल बिंदु से गुजरने वाले प्रतल का समीकरण ज्ञात कीजिए। (३)

प्र. २१. $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए यदि $y = \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{3-x}{3+x}} \right)$ (३)

प्र. २२. $f(x) = x^3 + 5x^2 - 2x + 3$ के लिए $x = 1.98$ पर सन्निकट मान ज्ञात कीजिए। (३)

प्र. २३. ज्ञात कीजिए : $\int \frac{\sin(x+a)}{\cos(x-b)} dx$ (३)

प्र. २४. अवकल समीकरण हल कीजिए : $dr + (2r \cot \theta + \sin 2\theta)d\theta = 0$ (३)

प्र. २५. माना $X \sim B(10, 0.2)$, तो ज्ञात कीजिए
(अ) $P(X = 1)$
(ब) $P(X \geq 1)$ (३)

प्र. २६. यादृच्छिक चर (r.v.) X के लिए अपेक्षित मूल्य (expected value), विचरण (variance) तथा मानक विचलन (standard deviation) ज्ञात कीजिए, यदि p.m.f. निम्नलिखित है :

$X = x$	1	2	3
$P(X)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$

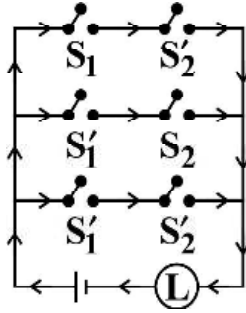
(३)

विभाग - ड

निम्नलिखित प्रश्नों में से किन्हीं पाँच प्रश्नों को हल कीजिए :

[२०]

- प्र. २७. निम्न परिपथ का पर्यायी (alternative) परिपथ दीजिए जिससे कि नए परिपथ में कम-से-कम स्विच हों :



(४)

- प्र. २८. यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ तो सहखंडज विधि (adjoint method) से A^{-1}

ज्ञात कीजिए।

(४)

- प्र. २९. $\triangle ABC$ में, D तथा E क्रमशः BC तथा AC पर स्थित बिंदु हैं जिससे कि $BD = 2DC$ तथा $AE = 3EC$. माना AD तथा BE का प्रतिच्छेदन बिंदु P है

तो सदिश पद्धति का उपयोग करके अनुपात $\frac{BP}{PE}$ ज्ञात कीजिए।

(४)

- प्र. ३०. कोई कंपनी दो प्रकार के उत्पादों A तथा B का उत्पादन करती है। इन उत्पादनों पर प्रति इकाई (per unit) क्रमशः ₹3 तथा ₹4 का लाभ प्राप्त होता है। प्रत्येक उत्पादन को दो मशीनों M_1 तथा M_2 से गुजरना पड़ता है। उत्पादन A को मशीन M_1 में एक मिनट तथा M_2 में दो मिनट का प्रक्रिया समय लगता है जबकि B को M_1 में एक मिनट तथा M_2 में एक मिनट का प्रक्रिया समय लगता है।

किसी भी कामकाजी दिन पर मशीन M_1 अधिकतम 450 मिनट तथा M_2 , 600 मिनट उपयोग में लाई जा सकती है, तो अधिकतम लाभ के लिए A तथा B की कितनी यूनिटों का निर्माण करना होगा उसकी गणना कीजिए।

(४)

प्र. ३१. यदि $y = f(u)$, यह u का अवकलनीय फलन है तथा $u = g(x)$, यह x का अवकलनीय फलन है, इस तरह कि संयुक्त फलन $y = f[g(x)]$ यह x का अवकलनीय फलन है तो सिद्ध कीजिए कि :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}, \text{ अतः } \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\sqrt{\sin x}} \right) \text{ ज्ञात कीजिए।} \quad (४)$$

प्र. ३२. ज्ञात कीजिए : $\int x^2 \sin 3x \, dx$ (४)

प्र. ३३. सिद्ध कीजिए :

$$\int_{-a}^a f(x) \, dx - 2 \int_0^a f(x) \, dx \text{ यदि } f \text{ समफलन है।}$$

$$= 0 \quad , \text{ यदि } f \text{ यह विषम फलन है।}$$

$$\text{अतः } \int_{-1}^1 \tan^{-1} x \, dx \text{ का मान ज्ञात कीजिए।} \quad (४)$$

प्र. ३४. दीर्घ वृत्त (ellipse) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ का क्षेत्रफल (area) ज्ञात कीजिए।

$$\text{अतः } \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1 \text{ का क्षेत्रफल लिखिए।} \quad (४)$$

