DAY —— 09 SEAT NUMBER | | | | | | |

2024	III	02	1100	J-865	(H)

MATHEMATICS & STATISTICS (40)
(ARTS & SCIENCE)

Time : 3 Hrs. **(8 Pages)** **Max. Marks : 80**

सामान्य सूचनाएँ :

प्रश्न पत्र को चार विभागों में विभाजित किया गया है।

(१) ***विभाग अ :*** *प्रश्न क्रमांक* **१** *में* ***आठ*** *बहुविकल्पीय प्रकार के उपप्रश्न हैं। प्रत्येक को* ***दो*** *अंक दिए गए हैं।*
प्रश्न क्रमांक **२** *में* ***चार*** *अतिलघुउत्तरीय प्रश्न हैं। प्रत्येक को* ***एक*** *अंक दिया गया है।*

(२) ***विभाग ब :*** *प्रश्न क्रमांक* **३** *से प्रश्न क्रमांक* **१४** *तक* ***बारह*** *लघुत्तरीय प्रश्नों में से प्रत्येक को* ***दो*** *अंक दिए गए हैं।*
(किन्हीं ***आठ*** *प्रश्नों को हल कीजिए।)*

(३) ***विभाग क :*** *प्रश्न क्रमांक* **१५** *से प्रश्न क्रमांक* **२६** *तक* ***बारह*** *लघुत्तरीय प्रश्नों में से प्रत्येक को* ***तीन*** *अंक दिए गए हैं।*
(किन्हीं ***आठ*** *प्रश्नों को हल कीजिए।)*

(४) ***विभाग ड :*** *प्रश्न क्रमांक* **२७** *से प्रश्न क्रमांक* **३४** *तक* ***आठ*** *दीर्घउत्तरीय प्रश्नों में से प्रत्येक को* ***चार*** *अंक दिए गए हैं।*
(किन्हीं ***पाँच*** *प्रश्नों को हल कीजिए।)*

(५) *लॉग सारिणी का उपयोग किया जा सकता है। परिगणक (calculator) का उपयोग नहीं किया जा सकता।*

(६) *दाहिनी ओर दिए गए अंक प्रश्नों के पूर्णांक हैं।*

(७) *L.P.P. प्रश्न में कच्ची आलेख आकृति अपेक्षित है। आलेख पत्र की आवश्यकता नहीं है।*

(८) *बहुवैकल्पिक प्रश्नों के लिए केवल प्रथम प्रयास का ही मूल्यमापन किया जाएगा।*

(९) *प्रत्येक नए विभाग की शुरुआत नए पृष्ठ से करें।*

विभाग - अ

प्र. १. निम्नलिखित बहुवैकल्पिक प्रश्नों के उत्तरों में से सही उत्तर चुनिए व लिखिए : **[१६]**

(i) कथन $t \vee (p \vee q)$ का द्वैत (dual) ----- है।

(अ) $c \wedge (p \vee q)$ (ब) $c \wedge (p \wedge q)$

(क) $t \wedge (p \wedge q)$ (ड) $t \wedge (p \vee q)$ (२)

(ii) समीकरण $\cos\theta = \frac{1}{2}$ के मुख्य हल (principle solutions) ----- हैं।

(अ) $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$ (ब) $\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$

(क) $\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}$ (ड) $\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$ (२)

(iii) यदि α, β, γ एक रेखा के दिक् कोण (direction angles) हैं और $\alpha = 60°$, $\beta = 45°$ तो $\gamma =$ -----

(अ) $30°$ या $90°$ (ब) $45°$ या $60°$

(क) $90°$ या $130°$ (ड) $60°$ या $120°$ (२)

(iv) समतल (plane) $\bar{r} . (3\hat{i} + 4\hat{j} + 12\hat{k}) = 78$ की मूल बिंदु (origin) से लम्बवत् दूरी ----- है।

(अ) 4 (ब) 5

(क) 6 (ड) 8 (२)

(v) वक्र $x = \sin\theta$ और $y = \cos 2\theta$ के बिंदु, जहाँ $\theta = \frac{\pi}{6}$ है, पर स्पर्श रेखा (tangent) की प्रवणता (slope) ----- है।

(अ) $-2\sqrt{3}$ (ब) $\frac{-2}{\sqrt{3}}$

(क) -2 (ड) $-\frac{1}{2}$ (२)

(vi) यदि $\int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} x^3.\sin^4 x\,dx = k$ तो $k =$ ------

(अ) 1 (ब) 2

(क) 4 (ड) 0 (२)

(vii) रेखीय अवकल समीकरण $x\frac{dy}{dx} + 2y = x^2 \log x$ का समाकलन गुणक (integrating factor) ------ है।

(अ) x (ब) $\frac{1}{x}$

(क) x^2 (ड) $\frac{1}{x^2}$ (२)

(viii) किसी द्विपद बंटन (binomial distribution) के लिए यदि माध्य (mean) और प्रसरण (variance) क्रमशः 18 और 12 हैं तो $n =$ ------ होगा।

(अ) 36 (ब) 54

(क) 18 (ड) 27 (२)

प्र. २. निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए : **[४]**

(i) संयुक्त कथन (compound statement), 'नागपुर महाराष्ट्र में है और चेन्नई तमिलनाडु में है।' का प्रतीकात्मक रूप (symbolically) लिखिए। (१)

(ii) यदि सदिश $2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$ और $p\hat{i} + 6\hat{j} - 8\hat{k}$ एक रेखीय (collinear) हैं तो p का मान ज्ञात कीजिए। (१)

(iii) ज्ञात कीजिए : $\int \frac{1}{x^2 + 25} dx$ (१)

(iv) कोई बिंदुकण X-अक्ष की दिशा में गतिमान है। समय t पर इस बिंदुकण का त्वरण (acceleration) इसी समय पर बिंदुकण के वेग (velocity) के समानुपाती है तो बिंदुकण की गति (motion) का अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए। (१)

विभाग - ब

निम्नलिखित प्रश्नों में से किन्हीं आठ प्रश्नों को हल कीजिए : **[१६]**

प्र. ३. कथन नमूना (statement pattern) $[(p \to q) \wedge q] \to p$ की सत्यता सारिणी (truth table) तैयार कीजिए। (२)

प्र. ४. जाँच कीजिए कि आव्यूह (matrix) $\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ व्युत्क्रमणीय (invertible) है या नहीं? (२)

प्र. ५. ΔABC में, यदि $a = 18$, $b = 24$ और $c = 30$ तो $\sin\left(\frac{A}{2}\right)$ का मान ज्ञात कीजिए। (२)

प्र. ६. यदि समीकरण $x^2 + kxy - 3y^2 = 0$ के द्वारा निरूपित रेखाओं की प्रवणताओं (slopes) का योग (sum), उनके गुणनफल (product) का दो गुना है तो k का मान ज्ञात कीजिए। (२)

प्र. ७. यदि $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ बिंदु A, B, C के स्थिति सदिश (position vectors) हैं और $5\bar{a} - 3\bar{b} - 2\bar{c} = \bar{0}$ तब बिंदु C रेखाखण्ड BA को किस अनुपात में बाँट रहा है? (२)

प्र. ८. बिंदु जिसके स्थिति सदिश $4\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ हैं, से गुजरने वाले व सदिश $-2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ के समांतर रेखा (line) का सदिश रूप में समीकरण (vector equation) ज्ञात कीजिए। (२)

प्र. ९. यदि $y = (\log x)^x$ हो तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए। (२)

प्र. १०. मान ज्ञात कीजिए : $\int \log x \, dx.$ (२)

प्र. ११. मान ज्ञात कीजिए : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \, dx$ (२)

प्र. १२. वक्र $y = x^2$ एवं रेखाओं $x = 1, x = 2$ और $y = 0$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल (area) ज्ञात कीजिए। (२)

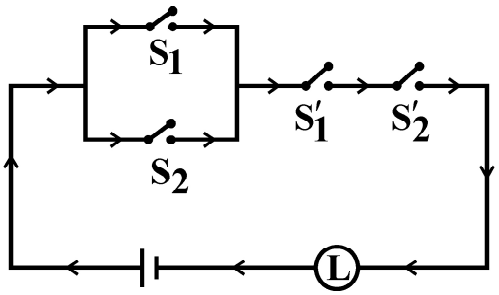
प्र. १३. हल ज्ञात कीजिए : $1 + \frac{dy}{dx} = \text{cosec}(x + y)$; $x + y = u$ प्रतिस्थापित करें। (२)

प्र. १४. दो सिक्कों को एक साथ उछालने पर चितों (heads) की संख्या का प्रायिकता बंटन (probability distribution) ज्ञात कीजिए। (२)

विभाग - क

निम्नलिखित प्रश्नों में से किन्हीं <u>आठ</u> प्रश्नों को हल कीजिए : **[२४]**

प्र. १५. निम्नलिखित विद्युत परिपथ (circuit) को तार्किक प्रतीकात्मक रूप (symbolic form of logic) में प्रदर्शित कीजिए। परिपथ सारिणी (switching table) तैयार कीजिए :



(३)

प्र. १६. सिद्ध कीजिए : $\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{4}$ (३)

प्र. १७. ΔABC में, सिद्ध कीजिए : $\frac{\cos A}{a} + \frac{\cos B}{b} + \frac{\cos C}{c} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2abc}$. (३)

प्र. १८. सदिश विधि (vector method) द्वारा सिद्ध करें, ''अर्द्धवृत्त पर स्थित एक कोण समकोण (right angle)- होता है।'' (३)

प्र. १९. रेखाओं $\bar{r} = (4\hat{i} - \hat{j}) + \lambda(\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k})$ और $\bar{r} = (\hat{i} - \hat{j} - 2\hat{k}) + \mu(\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k})$ के बीच न्यूनतम दूरी (shortest distance) ज्ञात कीजिए। (३)

प्र. २०. रेखा $\bar{r} = (\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}) + \lambda(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$ और समतल $\bar{r} \cdot (2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) = 8$ के बीच का कोण (angle) ज्ञात कीजिए। (३)

प्र. २१. यदि $y = \sin^{-1} x$ तो दर्शाइए कि : $(1 - x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x \cdot \frac{dy}{dx} = 0.$ (३)

प्र. २२. $\tan^{-1}(1.002)$ का सन्निकट मान (approximate value) ज्ञात कीजिए।

[दिया है : $\pi = 3.1416$] (३)

प्र. २३. सिद्ध कीजिए : $\int \frac{1}{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2a} \log\left(\frac{a + x}{a - x}\right) + c$ (३)

प्र. २४. अवकल समीकरण $x \cdot \frac{dy}{dx} - y + x \cdot \sin\left(\frac{y}{x}\right) = 0$ का हल ज्ञात कीजिए। (३)

प्र. २५. यदि $f(x) = kx^2(1 - x),\ 0 < x < 1$ के लिए

$= 0$; अन्यथा

यादृच्छय चर (random variable) X का संभाव्यता फलन (probability density function) है तो k का मान ज्ञात कीजिए। (३)

प्र. २६. एक पासे को 6 (six) बार उछाला जाता है। यदि 'पासे पर विषम संख्या प्राप्त होना' एक सफलता है तो 5 सफलताओं की प्रायिकता ज्ञात कीजिए। (३)

विभाग - ड

निम्नलिखित प्रश्नों में से किन्हीं <u>पाँच</u> प्रश्नों को हल कीजिए : **[२०]**

प्र. २७. निम्नलिखित समीकरणों को लघुकरण विधि (method of reduction) से हल कीजिए :

$x + y + z = 6,\ y + 3z = 11, x + z = 2y$ (४)

प्र. २८. यदि समीकरण $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ से निरूपित रेखाओं के बीच स्थित न्यून कोण (acute angle) θ है तब सिद्ध कीजिए :

$$\tan\theta = \left|\frac{2\sqrt{h^2 - ab}}{a+b}\right|$$

अत: उस शर्त (condition) को ज्ञात कीजिए जब रेखाएँ संपाती (coincident) हों। (४)

प्र. २९. किसी समांतर षट्फलक (parallelopiped) के शीर्ष बिंदु $A(3,2,-1)$, $B(-2,2,-3)$, $C(3,5,-2)$ और $D(-2,5,4)$ हैं, तो उसका आयतन (volume) ज्ञात कीजिए। (४)

प्र. ३०. आलेख पद्धति (graphical method) का उपयोग करके निम्नलिखित रेखीय योजना समस्या L.P.P. को हल कीजिए :

अधिकतम कीजिए (maximize): $z = 10x + 25y$

शर्तें (Subject to) : $0 \le x \le 3,$

$0 \le y \le 3,$

$x + y \le 5$

z का अधिकतम मान (maximum value) भी ज्ञात कीजिए। (४)

प्र. ३१. यदि $x = f(t)$ और $y = g(t)$ का अवकलनीय फलन (differentiable function) है अत: y , x का अवकलनीय फलन है और $\frac{dx}{dt} \neq 0$ तो सिद्ध कीजिए : $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$

अत: यदि $x = at^2$, $y = 2at$ तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए। (४)

प्र. ३२. एक डिब्बा (box) जिसका आधार (base), वर्ग (square) के आकार में है और ऊपर से खुला है। डिब्बे के पृष्ठ का क्षेत्रफल (surface area) 147 sq.cm है। डिब्बे का आयाम (dimension) क्या होगा जब डिब्बे का आयतन (volume) अधिकतम हो? (४)

प्र. ३३. मान ज्ञात कीजिए : $\int \frac{5e^x}{(e^x+1)(e^{2x}+9)}\,dx$ (४)

प्र. ३४. सिद्ध कीजिए :

$$\int_0^{2a} f(x)\,dx = \int_0^{a} f(x)dx + \int_0^{a} f(2a-x)dx$$

अत: दर्शाइए कि :

$$\int_0^{\pi} \sin x\,dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx$$ (४)

◆◆◆