DAY —— 09 SEAT NUMBER | | | | | | |

2024	III	02	1100	J-867	(M)

MATHEMATICS & STATISTICS (88)
(COMMERCE)

Time : 3 Hrs. **(11 Pages)** **Max. Marks : 80**

सूचना : *(१) सर्व प्रश्न सोडविणे अनिवार्य आहे.*

(२) एकूण ६ प्रश्न दोन विभागांत विभागले आहेत.

(३) विभाग-१ व विभाग-२ यांची उत्तरे एकाच उत्तरपुस्तिकेत लिहावयाची आहेत.

(४) आवश्यक असल्यास लॉगॅरिथम सारणी (logarithmic table) देण्यात येईल. गणन यंत्राचा वापर करण्यास मनाई आहे .

(५) रेषीय उपयोजन (L. P. P.) प्रश्नांसाठी आलेख कागदाचा वापर करणे अनिवार्य नाही. फक्त कच्चा आकृती आलेख अपेक्षित आहे.

(६) प्रत्येक नवीन प्रश्नाच्या उत्तराचा प्रारंभ नवीन पानावर करावा.

(७) बहुपर्यायी प्रश्नांची उत्तरे लिहिताना अचूक उत्तरे त्यांच्या संकेताक्षरासह लिहिणे अनिवार्य आहे.

उदा. (अ) ..... / (ब) ..... / (क) ..... / (ड) .....

बरोबर उत्तराचे फक्त संकेताक्षर किंवा फक्त उत्तर लिहिल्यास गुणदान केले जाणार नाही. तसेच फक्त पहिल्याच प्रयत्नास गुणदान केले जाईल.

विभाग - १

प्र. १. **(अ)** खालील दिलेल्या बहुपर्यायी प्रकारच्या प्रशनांच्या पर्यायातून योग्य पर्याय निवडा व लिहा (प्रत्येकी १ गुण) : **[१२]** (६)

(i) खालील पैकी कोणते विधान नाही?

(अ) धूम्रपान आरोग्यासाठी हानिकारक आहे.

(ब) $2 + 2 = 4$

(क) 2 ही एकमेव सम मूळ संख्या आहे.

(ड) इकडे ये

(ii) जर $x + y + z = 3, x + 2y + 3z = 4, x + 4y + 9z = 6$ तर $(y, z) =$ -----

(अ) $(-1, 0)$ (ब) $(1, 0)$

(क) $(1, -1)$ (ड) $(-1, 1)$

(iii) जर $y = \log\left(\frac{e^x}{x^2}\right)$, तर $\frac{dy}{dx} = ?$

(अ) $\frac{2-x}{x}$ (ब) $\frac{x-2}{x}$

(क) $\frac{e-x}{ex}$ (ड) $\frac{x-e}{ex}$

(iv) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$ ची किंमत ----- आहे.

(अ) $2\sqrt{1-x}+c$ (ब) $-2\sqrt{1-x}+c$

(क) $\sqrt{x}+c$ (ड) $x+c$

(v) $\int \frac{dx}{(x-8)(x+7)} =$ -----

(अ) $\frac{1}{15}\log\left|\frac{x+2}{x+1}\right|+c$ (ब) $\frac{1}{15}\log\left|\frac{x+8}{x+7}\right|+c$

(क) $\frac{1}{15}\log\left|\frac{x-8}{x+7}\right|+c$ (ड) $(x-8)(x+7)+c$

(vi) $y = k_1e^x + k_2e^{-x}$ चे विकलनीय समीकरण ----- आहे.

(अ) $\frac{d^2y}{dx^2} - y = 0$ (ब) $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = 0$

(क) $\frac{d^2y}{dx^2} + y\frac{dy}{dx} = 0$ (ड) $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$

(ब) खालीलपैकी प्रत्येक विधान सत्य किंवा असत्य आहे ते सांगा (प्रत्येकी १ गुण) : (३)

(i) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt$

(ii) $\int \frac{x-1}{(x+1)^3} e^x dx = e^x f(x) + c$, साठी $f(x) = (x+1)^2$

(iii) विकलनीय समीकरणाचे क्रम (order) आणि कोटी (degree) नेहमी धन पूर्णांक (positive integers) असतात.

(क) खाली दिलेल्या रिक्त जागा भरा (प्रत्येकी १ गुण) : (३)

(i) कोणत्याही बिंदू (a, b) च्या स्पर्शिकेच्या उतारास ----- म्हणतात.

(ii) जर $f'(x) = \frac{1}{x} + x$ आणि $f(1) = \frac{5}{2}$ तर $f(x) = \log x + \frac{x^2}{2} +$ -----

(iii) विकलनीय समीकरणाची उकल जी सामान्य उकलमधून अनियंत्रित स्थिरांकाला विशिष्ट मूल्ये देऊन मिळवता येतात त्याला ----- उकल म्हणतात.

प्र. २. **(अ)** खालीलपैकी कोणतेही <u>दोन</u> उपप्रश्न सोडवा (प्रत्येकी ३ गुण): (६) **[१४]**

(i) विधान $\sim p \rightarrow (p \rightarrow \sim q)$ हे पुनरुक्ती (tautology), परस्पर विरोध (contradiction) किंवा त्यापैकी कोणतेही नाही (contingency) ते तपासा.

(ii) जर $x = e^{3t}$, $y = e^{(4t+5)}$ तर $\frac{dy}{dx}$ शोधा.

(iii) जर $A = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -4 \end{bmatrix}$ तर $A^T + 4B^T$ शोधा.

(ब) खालीलपैकी कोणतेही दोन उपप्रश्न सोडवा (प्रत्येकी ४ गुण): (८)

(i) खालील विधाने विचारात घ्या :
(अ) जर D कुत्रा असेल तर D खूप चांगला आहे.
(ब) जर D खूप चांगला असेल तर D हा कुत्रा आहे.
(क) जर D खूप चांगला नसेल तर D हा कुत्रा नाही.
(ड) जर D कुत्रा नाहीं तर D खूप चांगला नाही.
समान अर्थ असलेल्या विधानांच्या जोड्या ओळखा आणि समर्थन करा. (Justify)

(ii) फल $f(x)=2x^3-21x^2+36x-20$ चे किमान (minimum) मूल्य निश्चित करा.

(iii) रेषा $y=-2x$, X-अक्ष आणि रेषा $x=-1$ व $x=2$ यांनी बांधलेल्या क्षेत्राचे क्षेत्रफळ शोधा.

प्र. ३. **(अ)** खालीलपैकी कोणतेही दोन उपप्रश्न सोडवा (प्रत्येकी ३ गुण) : (६) **[१४]**

(i) जर $y=x^{e^x}$ तर $\frac{dy}{dx}$ शोधा.

(ii) जर $f'(x)=4x^3-3x^2+2x+k$, $f(0)=1$ व $f(1)=4$ तर $f(x)$ शोधा.

(iii) विकलनीय समीकरण मिळवा ज्याची सामान्य उकल $x^3+y^3=35ax$ आहे.

(ब) खालीलपैकी कोणताही एक उपप्रश्न सोडवा (प्रत्येकी ४ गुण): (४)

(i) सारणी $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ चा संलग्न पद्धतीने (adjoint method) व्यस्त (inverse) काढा.

(ii) जर एका व्यक्तीचा खर्च E_c, त्याचे उत्पन्न x इतके असेल आणि दिलेले आहे की $E_c=0.0006x^2+0.003x$. जेव्हा त्याचे उत्पन्न ₹ 200 असेल तेव्हा MPC, MPS आणि APC काढा.

(क) खालीलपैकी कोणतीही <u>एक</u> कृति पूर्ण करा (प्रत्येकी ४ गुण) : (४)

(i) खाली दिलेली कृती पूर्ण करा.

$$\int_0^2 \frac{dx}{4+x-x^2} = \int_0^2 \frac{dx}{-x^2+\square+\square}$$

$$= \int_0^2 \frac{dx}{-x^2+x+\frac{1}{4}-\square+4}$$

$$= -\int_0^2 \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-(\square)^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{17}}\log\left(\frac{20+4\sqrt{17}}{20-4\sqrt{17}}\right)$$

(ii) लोकसंख्या वाढीचा दर रहिवाशांच्या संख्येच्या प्रमाणात आहे. जर 25 वर्षात लोकसंख्या दुप्पट होत असेल आणि सध्याची लोकसंख्या 1,00,000 असेल तर शहराची लोकसंख्या 4,00,000 कधी होईल?

उकल : समजा 't' वेळेला शहराची लोकसंख्या 'P' आहे.

परंतु लोकसंख्या वाढीचा दर रहिवाशांच्या संख्येच्या प्रमाणात आहे.

$$\frac{dP}{dt} \propto P$$

$\therefore$ विकलनीय समीकरण असे लिहिता येते $\frac{dP}{dt} = kP$

k हा अनुपातिकता स्थिरांक आहे.

$\therefore$ $\frac{dP}{P} = k \cdot dt$

समाकलीत केल्यावर आम्हाला मिळते.

$\therefore$ $\square = kt + c$ .....(i)

(i) जेव्हा $t = 0,\ P = 1,00,000$

$\therefore$ समीकरण (i) वरून

$\log 1,00,000 = k(0) + c$

$\therefore \quad c = \square$

$$\therefore \quad \log\left(\frac{P}{1,00,000}\right) = kt \qquad \text{.....(ii)}$$

(ii) जेव्हा $t = 25,\ P = 2,00,000$

कारण लोकसंख्या 25 वर्षांत दुप्पट होते.

$\therefore$ समीकरण (ii) वरून, $\log 2 = 25k$

$\therefore \quad k = \square$

$$\therefore \quad \log\left(\frac{P}{1,00,000}\right) = \left(\frac{1}{25}\log 2\right)\cdot t$$

(iii) जेव्हा $P = 4,00,000$

$$\log\left(\frac{4,00,000}{1,00,000}\right) = \left(\frac{1}{25}\log 2\right)\cdot t$$

$$\therefore \quad \log 4 = \left(\frac{1}{25}\log 2\right)\cdot t$$

$\therefore \quad t = \square$ वर्षे

विभाग - २

प्र. ४. **(अ)** खाली दिलेल्या बहुपर्यायी प्रकारच्या प्रश्नांच्या विकल्पातून योग्य पर्याय निवडा आणि लिहा (प्रत्येकी १ गुण) : **[१२]** (६)

(i) दर्शनी मूल्य आणि वर्तमान मूल्य यांतील फरकास ----- म्हणतात.

(अ) बँकर्स सवलत (banker's discount)

(ब) खरी सवलत (true discount)

(क) बँकेचा नफा (banker's gain)

(ड) रोख मूल्य (cash value)

(ii) सामान्य वार्षिकी देयके किंवा परतावे ----- घडतात.

(अ) प्रत्येक कालावधीच्या सुरुवातीस

(ब) प्रत्येक कालावधीच्या शेवटी

(क) प्रत्येक कालावधीच्या मध्यावर

(ड) त्रैमासिक आधारावर

(iii) b_{xy} आणि b_{yx} हे ----- असतात.

(अ) मूळ आणि स्केलच्या बदलापासून स्वतंत्र

(ब) मूळच्या बदलापासून स्वतंत्र परंतु स्केलच्या नाही

(क) स्केलच्या बदलापासून स्वतंत्र परंतु मूळच्या नाही

(ड) मूळ आणि स्केलच्या बदलामुळे प्रभावित

(iv) डॉर्विश बाऊलीस किंमत निर्देशांक क्रमांक ----- दिला आहे :

(अ) $\dfrac{\dfrac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_1} + \dfrac{\Sigma p_0 q_1}{\Sigma p_1 q_0}}{2} \times 100$

(ब) $\dfrac{\dfrac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_0} + \dfrac{\Sigma p_0 q_0}{\Sigma p_1 q_1}}{2} \times 100$

(क) $\dfrac{\dfrac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0} + \dfrac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_1}}{2} \times 100$

(ड) $\dfrac{\dfrac{\Sigma p_0 q_0}{\Sigma p_1 q_0} + \dfrac{\Sigma p_0 q_1}{\Sigma p_1 q_1}}{2} \times 100$

(v) रेषीय प्रयोजनात्मक प्रश्नामध्ये निश्चित फल (objective function) ----- असते.

(अ) एक बंधन (a constraint)

(ब) एक फल ज्याला कमाल किंवा किमान करणे

(क) निर्णय चलांमधील एक संबंध

(ड) एक व्यवहार्य (feasible) क्षेत्र

(vi) हंगेरियन पद्धत वापरण्यासाठी, एका नफा वाढविण्याच्या सोपवणी गणितात ----- हे आवश्यक असते.

(अ) सर्व नफ्याची संधी हानीमध्ये रूपांतर करणे

(ब) एक बनावट व्यक्ती किंवा काम

(क) सारणी विस्तार

(ड) सोडवलेल्या सारणीमधील सर्व शून्य सामावून घेण्यासाठी जास्तीत जास्त रेषा शोधणे.

(ब) खालीलपैकी प्रत्येक विधान सत्य किंवा असत्य आहेत ते सांगा (प्रत्येकी १ गुण) : (३)

(i) दलाल एक असा एजंट असतो जो विक्रेत्याला हमी देतो की खरेदीदार वस्तूची विक्री किंमत देईल.

(ii) $\sum \frac{p_0 q_0}{p_1 q_1} \times 100$ हा साध्या एकत्रित पद्धतीद्वारे मूल्य निर्देशांक क्रमांक आहे.

(iii) रेषीय प्रयोजनात्मक प्रश्नामध्ये निश्चित फलाची (objective function) सर्वोत्तम किंमत (optimum value) ही संभाव्य भागाच्या मध्यावर (center of feasible region) असते.

(क) खाली दिलेल्या रिक्त जागा भरा (प्रत्येकी १ गुण) : (३)

(i) बँकेची सूट ही नेहमी खऱ्या सुटीपेक्षा ----- असते.

(ii) भारित सापेक्ष पद्धती द्वारे राहणीमानाचा किंमत निर्देशांक क्रमांक ----- आहे.

(iii) यंत्राच्या दिलेल्या संचाद्वारे एखाद्या विशिष्ट क्रमाने निष्क्रिय वेळेसह पहिले काम सुरू करणे आणि शेवटचे काम पूर्ण करणे यामधील वेळेचा मध्यांतर यांस ----- म्हणतात.

प्र. ५. (अ) खालीलपैकी कोणतेही दोन उपप्रश्न सोडवा (प्रत्येकी ३ गुण) : (६) **[१४]**

(i) दीपकचा पगार ₹ 4,000 वरून ₹ 5,000 करण्यात आला. विक्री सारखीच होती म्हणून दलालीचा दर 3% वरून 2% करण्यात आला. जर त्याचे उत्पन्न अपरिवर्तित राहीले असेल तर त्याची विक्री काढा.

(ii) एका द्विचलीय माहितीसाठी, X वरील Y चा प्रतिगमन गुणांक 0.4 आहे आणि Y वरील X चा प्रतिगमन गुणांक 0.9 आहे. जर X चे विचरण (variance) 9 असेल तर Y च्या विचरणाचे मूल्य शोधा.

(iii) खालील तक्ता 1976 ते 1985 या कालावधीतील औद्योगिक उत्पादनाचा निर्देशांक दर्शवितो. 1976 हे वर्ष आधारभूत वर्ष घेऊन खाली दिलेल्या माहितीसाठी 4 वर्षीय केंद्रित चालणारी सरासरी वापरून प्रवृत्ती मूल्ये काढा :

वर्ष	1976	1977	1978	1979	1980	1981	1982	1983	1984	1985
निर्देशांक	0	2	3	3	2	4	5	6	7	10

(ब) खालीलपैकी कोणतेही दोन उपप्रश्न सोडवा (प्रत्येकी ४ गुण) : (८)

(i) जर खाली दिलेल्या माहितीसाठी, वॉल्श किंमत निर्देशांक क्रमांक 150 असेल तर 'x' शोधा :

वस्तू (commodity)	मूळ वर्ष		चालू वर्ष	
	किंमत p_0	प्रमाण q_0	किंमत p_1	प्रमाण q_1
A	5	3	10	3
B	x	4	16	9
C	15	5	23	5
D	10	2	26	8

(ii) एक खेळणी बनविणारी कंपनी पाच प्रकारची खेळणी बनवते. प्रत्येक खेळण्याला A, B, C तीन यंत्रातून A, B, C या क्रमाने जायचे आहे. प्रत्येक खेळणे बनविण्यासाठी लागणारा वेळ तासांत खालील सारणीत दिला आहे :

प्रकार	1	2	3	4	5
यंत्र A	16	20	12	14	22
यंत्र B	10	12	4	6	8
यंत्र C	8	18	16	12	10

एकूण व्यतीत वेळ व यंत्र B चा निष्क्रिय वेळ शोधा.

(iii) एका यादृच्छिक चल X चे संभाव्यता वितरण खालील प्रमाणे आहे :

x	1	2	3	4	5	6	7
$P(x)$	k	$2k$	$2k$	$3k$	k^2	$2k^2$	$7k^2+k$

शोधा (अ) k (ब) $P(X<3)$ (क) $P(X>6)$

प्र. ६. **(अ)** खालीलपैकी कोणतेही दोन उपप्रश्न सोडवा (प्रत्येकी ३ गुण) : (६) **[१४]**

(i) एका इमारतीचा विमा त्याच्या एकूण किंमतीच्या 75% आहे. त्याचा वार्षिक हप्ता 0.70% प्रमाणे ₹ 2,625 होतो. जर आगीमुळे इमारतीचे 60% पर्यंत नुकसान झाले तर या विम्याअंतर्गत किती रकमेचा दावा करता येईल?

(ii) एका यंत्राच्या दुकानात तीन नवीन यंत्रे M_1, M_2, M_3 स्थापित करायची आहेत. चार रिक्त जागा A, B, C, D उपलब्ध आहेत. मर्यादित जागेमुळे यंत्र M_2, ला B च्या जागेवर स्थापित करू शकत नाहीं. किंमत सारणी (शंभर रुपयांमध्ये) खाली दिलेली आहे:

यंत्र	जागा			
	A	**B**	**C**	**D**
M_1	13	10	12	11
M_2	15	–	13	20
M_3	5	7	10	6

इष्टतम सोपवणी वेळापत्रक आणि किमान किमत शोधा.

(iii) 10% सदोष अंडी असलेली अंडी क्रमश: बदलून काढली जातात. 10 अंड्यांचा समूह आहे या अंड्यांमध्ये किमान एक सदोष अंडे असण्याची संभाव्यता शोधा.

(ब) खालीलपैकी कोणताही एक उपप्रश्न सोडवा (प्रत्येकी ४ अंक): (४)

(i) खालील तक्ता वर्षे 1980 ते 2010 साठी अखिल भारतीय बाल मृत्युदर (प्रति '000) दर्शवितो.

वर्ष	**1980**	**1985**	**1990**	**1995**	**2000**	**2005**	**2010**
बाल मृत्युदर	10	7	5	4	3	1	0

वरील माहितीसाठी कमीत कमी वर्ग पद्धतीने (least squares method) प्रवृत्तीरेषा बनवा.

(ii) लघुत्तम करा : $z = 6x + 2y$

अटी : $x + 2y \geq 3$,

$x + 4y \geq 4$,

$3x + y \geq 3$,

$x \geq 0,\ y \geq 0$

(क) खालीलपैकी कोणतीही एक कृती पूर्ण करा (प्रत्येकी ४ गुण): (४)

(i) एका द्विचलीय माहितीसाठी $\bar{x}=10,\ \bar{y}=12,\ V(X)=9,$ $\sigma_y=4$ आणि $r=0.6,\ x=5$ असताना y ची किंमत काढा.

उकल: X वर Y ची प्रतिगमन रेषा

$$Y-\bar{y}=\square\,(X-\bar{x})$$

$$\therefore\quad Y-12=r\cdot\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(X-10)$$

$$\therefore\quad Y-12=0.6\times\frac{4}{\square}(X-10)$$

$\therefore$ जेव्हा $x=5$

$$Y-12=\square\,(5-10)$$

$$\therefore\quad Y-12=-4$$

$$\therefore\quad Y=\square$$

(ii) जर $X\sim P(m)$ आणि $P(X=1)=P(X=2)$ तर सरासरी (mean) आणि $P(X=2)$ शोधा.

दिले आहे $e^{-2}=0.1353$

उकल :

दिले आहे की $P(X=1)=P(X=2)$

$$\therefore\quad \frac{e^{\square}m^1}{1!}=\frac{e^{-m}m^2}{\square}$$

$$\therefore\quad m=\square$$

$$\therefore\quad P(X=2)=\frac{e^{-2}\cdot 2^2}{2!}=\square$$

◆◆◆